UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Álgebras de Hopf no asociativas

Autor/es

VANESA ARJONILLA DÍEZ

Director/es

JOSÉ MARÍA PÉREZ IZQUIERDO

Facultad

Facultad de Ciencia y Tecnología

Titulación

Grado en Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2017-18

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Facultad de Ciencia y Tecnología

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Álgebras de Hopf no asociativas

Non-associative Hopf algebras

Realizado por:
Vanesa Arjonilla Díez

Tutelado por:
José María Pérez Izquierdo

Logroño, Julio, 2018

Resumen

En este trabajo trataremos el concepto de álgebras de Hopf. Para ello dividiremos el trabajo en tres apartados fundamentales. El primero acerca de las bases teóricas sobre álgebras de Hopf y como llegar a ellas mediante el proceso de linealización. El segundo sobre aquellas álgebras de Hopf que provengan de la linealización de un producto asociativo, tratando así pues las álgebras de Lie. Y por último, sobre aquellas cuyos productos ya no sean asociativos, centrándonos en las que provienen de lazos de Bruck.

Abstract

In this paper we will study Hopf algebras. To this end, we divide the paper into three fundamental parts. The first one deals with the basic background required to understand the definition of Hopf algebras, and how they can be obtained by a linearization process. In the second part, we focus on those that appear from the linearization of an associative product, which leads to Lie algebras. Finally, we discuss those Hopf algebras with not associative products, specially those in connection with Bruck loops.

Índice general

Introducción

El estudio de los grupos y álgebras de Lie es uno de los pilares de la Matemática del siglo XX, con importantes conexiones con Física y Geometría. El espacio tangente de un grupo de Lie es un álgebra de Lie, y recíprocamente, toda álgebra de Lie real de dimensión finita aparece de este modo. Además, dos grupos de Lie son localmente isomorfos si y solamente si lo son sus álgebras de Lie. Estos resultados fundamentales que clasifican estructuras con operaciones no lineales (grupos) a través de estructuras con operaciones lineales (álgebras), demostrados por Sophus Lie, presuponen la asociatividad del grupo. Cabe preguntarse si es válido un resultado similar para productos no asociativos. Es decir, si en una variedad analítica hay definido alrededor de un punto e un producto analítico m tal que $m(x, e) = x = m(e, x)$, ¿podemos encontrar una estructura algebraica con operaciones multilineales de modo que clasifique localmente el producto m? Tras el trabajo intenso de numerosos matemáticos, dicho resultado fue obtenido en 1987 por L.V. Sabinin y P.O. Mikheev en *Infinitesimal theory of local analytic loops*.

Durante las últimas décadas un nuevo objeto se ha ganado un hueco en el olimpo de las estructuras algebraicas: las álgebras de Hopf. El espacio de distribuciones con soporte en el elemento identidad de un grupo de Lie es un álgebra de Hopf cuya álgebra de Lie de elementos primitivos es exactamente el álgebra de Lie del grupo. Recíprocamente, cualquier álgebra de Hopf coconmutativa conexa real cuya álgebra de Lie de elementos primitivos sea de dimensión finita aparece de este modo. Una de las ventajas de las álgebras de Hopf es que permiten entender muy fácilmente el origen de la correspondencia entre grupos y álgebras de Lie. De hecho, permiten extender esta correspondencia, al menos formalmente, a productos no asociativos.

Este trabajo pretende presentar de modo claro y con ejemplos el tratamiento de productos unitarios mediante álgebras de Hopf. En el caso de grupos la exposición será mayormente autocontenida, por las limitaciones de espacio, y en el caso de productos no asociativos nos limitaremos a lazos de Bruck.

Capítulo 1

Definiciones básicas

Los conceptos de álgebra, coálgebra, biálgebra y álgebras de Hopf se han tomado de [6]. El proceso de linealización que se expone aparece detallado en [5]. Los resultados relativos a variedades diferenciables pueden encontrarse en [7].

1.1. Álgebras, coálgebras, biálgebras y álgebras de Hopf

Definición 1 (Álgebra)**.** *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, una $\mathbb{K}$-álgebra es un par (A, m) formado por un $\mathbb{K}$-espacio vectorial A y una aplicación $\mathbb{K}$-bilineal m, llamada producto,*

$$\begin{array}{rcl} m\colon A \times A & \longrightarrow & A \\ (x, y) & \longmapsto & xy. \end{array}$$

Es habitual el presentar m como una aplicación $\mathbb{K}$-lineal

$$\begin{array}{rcl} m\colon A \otimes_{\mathbb{K}} A & \longrightarrow & A \\ x \otimes y & \longmapsto & xy. \end{array}$$

Puesto que el cuerpo $\mathbb{K}$ no cambiará en toda la exposición, omitiremos las referencias a él. Así, por ejemplo, hablaremos de espacio vectorial, álgebra o $\otimes$ en lugar de $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $\mathbb{K}$-álgebra o $\otimes_{\mathbb{K}}$. También es habitual, cuando no hay confusión en cuanto al producto, el referirse al álgebra (A, m) simplemente como A.

Un álgebra (A, m) se dice *asociativa* si $(xy)z = x(yz)$ para cualesquiera $x, y, z \in A$. Es conveniente, como se verá más adelante, el disponer también de una caracterización de esta propiedad, y de otras que se irán presentando, en términos de diagramas conmutativos. Así, el álgebra (A, m) se dice asociativa si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} (A \otimes A) \otimes A \arrow[r, "m \otimes \mathrm{Id}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\alpha"] & A \otimes A \arrow[r, "m"] & A \\ A \otimes (A \otimes A) \arrow[r, "\mathrm{Id} \otimes m"'] & A \otimes A \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd}$$

donde $\alpha((x \otimes y) \otimes z) := x \otimes (y \otimes z)$ e Id denota la aplicación identidad.

Antes de continuar, conviene puntualizar que cuando las propiedades se expresan en términos de diagramas se están utilizando objetos y flechas. Estos objetos, pertenecerán a alguna categoría, y las flechas, serán morfismos en dicha categoría. En el caso que estamos presentando, la categoría tiene como objetos a los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y las flechas son simplemente las aplicaciones $\mathbb{K}$-lineales. Una ventaja conceptual de expresar las propiedades en términos de diagramas, es que al cambiar de categoría, tendríamos automáticamente definidas los mismos conceptos en la nueva categoría.

Un álgebra (A, m) se dice *conmutativa* si $xy = yx$ para cualesquiera $x, y \in A$. En términos de diagramas esta propiedad equivale a la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\tau"] & A \\ A \otimes A \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{con} \qquad \begin{array}{rccc} \tau\colon & A \otimes A & \longrightarrow & A \otimes A \\ & x \otimes y & \longmapsto & y \otimes x. \end{array}$$

Un álgebra (A, m) se dice *unitaria* si existe un morfismo (aplicación lineal en nuestro caso) no nulo $u\colon \mathbb{K} \longrightarrow A$ tal que

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \otimes A \arrow[r, "u \otimes \mathrm{Id}"] \arrow[dr, leftrightarrow, "\cong"] & A \otimes A \arrow[d, "m"'] \\ & A \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} A \otimes \mathbb{K} \arrow[r, "\mathrm{Id} \otimes u"] \arrow[dr, leftrightarrow, "\cong"] & A \otimes A \arrow[d, "m"'] \\ & A \end{tikzcd}$$

conmutan, o lo que es lo mismo, si existe $1 := u(1) \neq 0$ en A tal que $1x = x = x1$ para todo $x \in A$. Las flechas diagonales en los diagramas anteriores vienen dadas por $\lambda \otimes x \mapsto \lambda x$ y $x \otimes \lambda \mapsto \lambda x$.

Definición 2 (Coálgebra)**.** *Una $\mathbb{K}$-coálgebra es una terna (C, Δ, ϵ) formada por un $\mathbb{K}$-espacio vectorial C, un morfismo $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ llamado coproducto y otro morfismo $\epsilon : C \longrightarrow \mathbb{K}$ llamado counidad tales que los siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\epsilon \otimes I"'] \\
& C \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ul, leftrightarrow]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \otimes \mathbb{K} & C \otimes C \arrow[l, "\mathrm{Id} \otimes \epsilon"'] \\
& C \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ul, leftrightarrow]
\end{tikzcd}$$

Conviene utilizar la notación de Sweedler para representar $\Delta(c)$ ya que es muy visual y recuerda que $\Delta(c)$ es un elemento de $C \otimes C$. En esta notación

$$\Delta(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}.$$

Así por ejemplo, la conmutación de los diagramas en la definición de coálgebra sería equivalente a $\sum \epsilon(c_{(1)})c_{(2)} = c = \sum \epsilon(c_{(2)})c_{(1)}$.

Una coálgebra (C, Δ, ϵ) se dice *coasociativas* si el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(C \otimes C) \otimes C \arrow[d, leftrightarrow, "\alpha"] & C \otimes C \arrow[l, "\Delta \otimes \mathrm{Id}"'] & C \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[dl, "\Delta"'] \\
C \otimes (C \otimes C) & C \otimes C \arrow[l, "\mathrm{Id} \otimes \Delta"] &
\end{tikzcd}$$

conmuta o, usando la notación de Sweedler, si $\sum c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)} = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)}$ para todo $c \in C$

Se dice que la coálgebra (C, Δ, ϵ) es *coconmutativa* si el diagrama

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \arrow[d, leftrightarrow, "\tau"] & C \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[dl, "\Delta"'] \\
C \otimes C &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Esto es lo mismo que $\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} = \sum c_{(2)} \otimes c_{(1)}$ para todo $c \in C$.

Proposición 3. *El producto tensorial de dos álgebras (o coálgebras) es nuevamente un álgebra (o coálgebra).*

Ejemplo (Polinomios). Uno de los ejemplos más interesantes de álgebra y de coálgebra son los polinomios. Sea $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un conjunto de indeterminadas y $\mathbb{K}[X] := \mathbb{K}[x_1, x_2, ..., x_n]$ el conjunto de todos los polinomios en las indeterminadas X con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$. Este conjunto es un álgebra asociativa, conmutativa y unitaria con su producto y unidad usuales que cumple la siguiente propiedad universal:

> *Dada un álgebra asociativa, conmutativa y unitaria A y elementos $a_1, a_2, ..., a_n \in A$ existe un único homomorfismo de álgebras, al que llamamos homomofismo evaluación,* $\mathrm{ev}\colon \mathbb{K}[X] \longrightarrow A$ *tal que* $\mathrm{ev}(x_i) = a_i$ *y* $\mathrm{ev}(1) = 1$*,* $i = 1, \dots, n$*.*

Esta propiedad permite definir muy cómodamente homomorfismos. Por ejemplo, como $\mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[X]$ y $\mathbb{K}$ son ambas álgebras asociativas, conmutativas y unitarias, la propiedad universal nos asegura que existen dos únicos homomorfismos:

$$\begin{array}{rcl} \Delta\colon \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[X] \\ x_i & \longmapsto & x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i \\ 1 & \longmapsto & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \epsilon\colon \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x_i & \longmapsto & 0 \\ 1 & \longmapsto & 1 \end{array}$$

lo que sugiere que los polinomios son también una coálgebra. Para asegurarnos debemos comprobar que ciertas aplicaciones son iguales. Afortunadamente las aplicaciones involucradas son homomorfismos de álgebras, por lo que para ver que son iguales basta comprobar que coinciden en los generadores. Por ejemplo, la imagen de x_i a través de la composición

$$\mathbb{K}[X] \overset{\Delta}{\to} \mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[X] \xrightarrow{\epsilon \otimes \mathrm{Id}} \mathbb{K} \otimes \mathbb{K}[X] \longleftrightarrow \mathbb{K}[X]$$

es $\epsilon \otimes \mathrm{Id}(x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i) = x_i$. Por tanto esta composición coincide con la identidad en los generadores de $\mathbb{K}[X]$ (y en 1), y al ser ambas aplicaciones homorfismos de álgebras, podemos concluir que son iguales no solamente al ser evaluadas en x_i sino en cualquier elemento de $\mathbb{K}[X]$, cumpliéndose así la propiedad $\sum \epsilon(c_{(1)})c_{(2)} = c = \sum \epsilon(c_{(2)})c_{(1)}$. Por tanto $(\mathbb{K}[X], \Delta, \epsilon)$ es una coálgebra. Es más, podemos probar que $(\mathbb{K}[X], \Delta, \epsilon)$ es una $\mathbb{K}$-coálgebra coconmutativa y coasociativa sin más que comprobar las condiciones para los elementos x_i (y 1), lo cual es sencillo. □

Definición 4 (Morfismo entre coálgebras)**.** *Dadas dos coálgebras C y D, una aplicación lineal $f : C \longrightarrow D$ es un morfismo de coálgebras si*

$$\Delta(f(c)) = \sum f(c_{(1)}) \otimes f(c_{(2)}) \quad y \quad \epsilon(f(c)) = \epsilon(c) \quad \forall c \in C.$$

Definición 5 (Biálgebra)**.** *Una biálgebra es una tupla $(B, m, u, \Delta, \epsilon)$ en la cual*

1. *(B, m, u) es un álgebra unitaria,*
2. *(B, Δ, ϵ) es una coálgebra*

3. m y u son morfismos de coálgebras.

Una biálgebra se dice asociativa (o conmutativa) si lo es como álgebra. Igualmente se dice coasociativa (o coconmutativa) si lo es como coálgebra.

Ejemplos. El propio cuerpo $\mathbb{K}$ es una biálgebra con su estructura de álgebra natural y la estructura de coálgebra definida por

$$\begin{array}{rcl} \Delta\colon \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K}\otimes\mathbb{K} \\ \lambda & \longmapsto & \lambda\cdot 1\otimes 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \epsilon\colon \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \lambda & \longmapsto & \lambda \end{array}$$

También los polinomios $\mathbb{K}[X]$, para los cuales hemos introducido su estructura de coálgebra anteriormente, forman una biálgebra. $\square$

Proposición 6. *La condición (3) en la definición de biálgebra es equivalente a que m y u sean homomorfismos de álgebras unitarias.*

Definición 7 (Álgebra de Hopf asociativa)**.** *Un álgebra de Hopf asociativa es una biálgebra $(H, m, u, \Delta, \epsilon)$ asociativa y coasociativa junto con una aplicación $S\colon H \longrightarrow H$, llamada antípoda que cumple:*

$$\sum S(x_{(1)})x_{(2)} = \epsilon(x)1 = \sum x_{(1)}S(x_{(2)})$$

Ejemplo (Polinomios). Ya hemos visto que $(\mathbb{K}[X], m, u, \Delta, \epsilon)$ es una $\mathbb{K}$-biálgebra, pero además usando la propiedad universal de $\mathbb{K}[X]$ podemos definir un homomorfismo:

$$\begin{array}{rcl} S\colon \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ x_i & \longmapsto & -x_i \\ 1 & \longmapsto & 1 \end{array}$$

Puesto que la composición

$$\mathbb{K}[X] \xrightarrow{\Delta} \mathbb{K}[X]\otimes\mathbb{K}[X] \xrightarrow{S\otimes\mathrm{Id}} \mathbb{K}[X]\otimes\mathbb{K}[X] \xrightarrow{m} \mathbb{K}[X]$$

coincide en x_i y 1 con la aplicación $p \mapsto \epsilon(p)1$ y ambas son homomorfismos de álgebras, entonces son iguales, es decir se tiene

$$\sum S(p_{(1)})p_{(2)} = \epsilon(p)1 = \sum p_{(1)}S(p_{(2)}) \quad \forall p \in \mathbb{K}[X]$$

por lo que $\mathbb{K}[X]$ es una álgebra de Hopf. $\square$

Vamos ahora a ver un ejemplo muy importante pues servirá de motivación para este trabajo. Dado un grupo G con elemento identidad e consideramos las aplicaciones:

$$
\begin{array}{rcl}
m\colon G\times G & \longrightarrow & G\\
(x,y) & \longmapsto & xy
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rcl}
u\colon e & \longrightarrow & G\\
e & \longmapsto & e
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\Delta\colon G & \longrightarrow & G\times G\\
x & \longmapsto & (x,x)
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rcl}
\epsilon\colon G & \longrightarrow & e\\
x & \longmapsto & e
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
S\colon G & \longrightarrow & G\\
x & \longmapsto & x^{-1}
\end{array}
$$

junto con las identificaciones

$$
\begin{array}{ccccc}
G\times\{e\} & \longleftrightarrow & G & \longleftrightarrow & \{e\}\times G\\
(x,e) & \longleftrightarrow & x & \longleftrightarrow & (e,x)
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
\{e\}\times\{e\} & \longleftrightarrow & \{e\}\\
(e,e) & \longleftrightarrow & e
\end{array}
$$

Estas aplicaciones se asemejan a las aplicaciones involucradas en la estructura de álgebra de Hopf asociativa. De hecho, sin cambiamos de categoría y consideramos la categoría de conjuntos y aplicaciones en lugar de la categoría de espacios vectoriales y aplicaciones lineales, y vemos el producto cartesiano como $\otimes$, entonces tenemos que los diagramas conmutativos

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"] & G\times G \arrow[r, "\Delta\times \mathrm{Id}"] & (G\times G)\times G \arrow[d, leftrightarrow]\\
& G\times G \arrow[r, "\mathrm{Id}\times\Delta"] & G\times (G\times G)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r] \arrow[dr] & (x,x) \arrow[r] & (x,x,x) \arrow[d, equal]\\
& (x,x) \arrow[r] & (x,x,x)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, leftrightarrow] & G\times G \arrow[d, "\epsilon\times \mathrm{Id}"]\\
& \{e\}\times G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r] \arrow[dr, leftrightarrow] & (x,x) \arrow[d]\\
& (e,x)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, leftrightarrow] & G\times G \arrow[d, "\mathrm{Id}\times\epsilon"]\\
& G\times \{e\}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r] \arrow[dr, leftrightarrow] & (x,x) \arrow[d]\\
& (x,e)
\end{tikzcd}
$$

sugieren que (G,Δ,ϵ) es una "coálgebra" coasociativa en la categoría de conjuntos y aplicaciones. A su vez, (G,m,u) sería un "álgebra" asociativa en esa misma categoría. De hecho, puesto que

$$
\Delta(m(x,y)) = \Delta(xy) = (xy,xy) = m((x,x),(y,y))
$$
$$
\epsilon(m(x,y)) = e \longleftrightarrow (e,e) = (\epsilon(x),\epsilon(y))
$$

y

$$\Delta(u(e)) = (e,e) = (u(e),u(e))$$
$$\epsilon(u(e)) = e = \epsilon(e)$$

(G,m,u,Δ,ϵ) sería una "biálgebra". Más aún, de la conmutación de los diagramas

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\epsilon"] & G\times G \arrow[r, "S\times \mathrm{Id}"] & G\times G \arrow[d, "m"] \\ \{e\} \arrow[rr, "u"] & & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[d] & (x,x) \arrow[r] & (x^{-1},x) \arrow[d, "\epsilon"] \\ e \arrow[rr] & & x^{-1}x=e \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\epsilon"] & G\times G \arrow[r, "\mathrm{Id}\times S"] & G\times G \arrow[d, "m"] \\ \{e\} \arrow[rr, "u"] & & G \end{tikzcd}$$

podemos concluir que un grupo es un "álgebra de Hopf" en la categoría de conjuntos y aplicaciones. O mejor, un álgebra de Hopf no es nada más que un "grupo" en la categoría de espacios vectoriales y aplicaciones lineales.

1.2. Linealización

Un espacio localmente euclídeo M de dimensión d es un espacio topológico Hausdorff en el cual cada punto posee un entorno abierto homeomorfo a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^d$. Dado un punto $x \in M$, U un entorno abierto de x y $\varphi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^d$ un homeomorfismo de U en un abierto de $\mathbb{R}^d$, decimos que φ es una aplicación coordenada y que las funciones $\pi_i\varphi$, donde π_i denota la proyección de $\mathbb{R}^d$ en su i-ésima componente, son funciones coordenadas. La pareja (U,φ) se dice entorno coordenado de x, y si $\varphi(x) = (0,\ldots,0)$ entonces se dice que es un entorno coordenado centrado en x. Una estructura diferenciable $\mathcal{F}$ de clase C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ en un espacio localmente euclídeo M es una familia de sistemas coordenados $\mathcal{F} = \{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ que cumple:

1. $M = \cup_{i\in I} U_i$,
2. $\varphi_i\varphi_j^{-1}|_{\varphi_j(U_i\cap U_j)}$ es una aplicación de clase C^k para todo $i,j \in I$ y
3. la familia $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ es maximal respecto de la anterior propiedad, es decir, si (U,φ) es un entorno coordenado tal que $\varphi\varphi_j^{-1}|_{\varphi_j(U\cap U_j)}$ y

$\varphi_i\varphi^{-1}|_{\varphi(U_i\cap U)}$ son de clase C^k entonces $(U,\varphi)\in\mathcal{F}$.

La tercera condición no es especialmente importante, ya que cualquier familia de entornos coordenados que cumpla las dos primeras condiciones se puede completar hasta una familia que también cumpla la tercera. En el caso en que la condición de regularidad sea que $\varphi_i\varphi_j^{-1}|_{\varphi_j(U_i\cap U_j)}$ sea analítica entonces se tiene el concepto de estructura analítica o de clase C^ω. Una variedad diferenciable de clase C^k y dimensión d es una pareja $(M,\mathcal{F})$ tal que

1. M es un espacio topológico segundo contable que es además un espacio localmente euclídeo de dimensión d.
2. $\mathcal{F}$ es una estructura diferenciable en M de clase C^k.

Dada una variedad diferenciable $(M,\mathcal{F})$ de clase C^k y un abierto $U\subseteq M$, una función $f\colon M\longrightarrow\mathbb{R}$, se dice de clase C^k en U si para todo $(U_i,\varphi_i)\in\mathcal{F}$ la función $f\varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(U\cap U_i)}\colon\varphi(U\cap U_i)\subseteq\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ es de clase C^k. Dadas dos variedades diferenciables $(M,\{(V_i,\varphi_i)\}_i)$ y $(N,\{(U_j,\phi_j)\}_j)$, una aplicación $\Phi\colon M\longrightarrow N$ se dice diferenciable de clase C^k si para todo (U_j,ϕ_j) y todo $i\in\{1,\dots,d\}$, donde d es la dimensión de N, la función

$$\pi_i\phi_j\Phi|_{\Phi^{-1}(U_j)}\colon\Phi^{-1}(U_j)\subseteq M\longrightarrow\mathbb{R}$$

es diferenciable de clase C^k.

Ejemplo. Un ejemplo natural de variedad analítica son las esferas. Considerar $S^n:=\{(x_1,\dots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}\mid x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2=1\}$ y las aplicaciones $\varphi_1\colon U_1=S^n\setminus\{(0,\dots,0,1)\}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ y $\varphi_2\colon U_2=S^n\setminus\{(0,\dots,0,-1)\}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ definidas por

$$\begin{aligned}\varphi_1(x_1,\dots,x_{n+1})&:=(\frac{x_1}{1-x_{n+1}},\dots,\frac{x_n}{1-x_{n+1}})\\ \varphi_2(x_1,\dots,x_{n+1})&:=(\frac{x_1}{1+x_{n+1}},\dots,\frac{x_n}{1+x_{n+1}}).\end{aligned}$$

Es sencillo comprobar que $\{(U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2)\}$ cumplen las dos primeras propiedades que definen una estructura diferenciable (analítica en este caso), por lo que se puede completar hasta una. La esfera S^n con esta estructura es una variedad analítica. $\square$

Aunque es natural formular el proceso de linealización en términos de variedades diferenciables, en la práctica vamos a linealizar aplicaciones en un entorno de un punto, obviando las propiedades fuera de ese entorno. De hecho, el entorno puede ser tan pequeño como deseemos, por lo que en realidad la linealización se hace del "germen" de la aplicación, por lo que no es necesario introducir más conceptos sino simplemente saber que *cuando sea conveniente por simplicidad podremos asumir que en lugar de la variedad M y de un punto $e \in M$, nuestro punto es el origen $(0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$ y que la variedad M es en realidad un entorno abierto, tan pequeño como sea necesario, del origen.*

Así, en lo que sigue, fijaremos e como el origen de $\mathbb{R}^n$ y M como un entorno abierto de e tan pequeño como sea necesario, mantenemos la terminología de variedades ya que, usando entornos coordenados centrados, es lo mismo, y porque el pensar en variedades permite ver las construcciones en contextos más interesantes topológica y geométricamente. El cuerpo de los números reales lo denotaremos por $\mathbb{K}$. También consideraremos

$$C_e(M) := \{f\colon M \to \mathbb{K} \mid f \text{ es analítica en un entorno de } e\}$$

el cual es una $\mathbb{K}$-álgebra con la suma, producto y productos por escalares usual de funciones. El conjunto

$$C_e(M)^* := \{\mu\colon C_e(M) \longrightarrow \mathbb{K} \mid \mu \text{ es } \mathbb{K}\text{-lineal}\}$$

es también un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Nuestro objeto de estudio es un subespacio de éste.

Fijaremos algo de notación necesaria en cuanto a subíndices. Dado $I := (i_1,...,i_n) \in \mathbb{N}^n$,

$$|I| := i_1 + ... + i_n, \quad I! := i_1! \cdots i_n!, \quad x^I := x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

$$\partial_I := \frac{\partial^{|I|}}{\partial_{x_1}^{i_1} \cdots \partial_{x_n}^{i_n}}, \quad \partial_I|_e := \left.\frac{\partial^{|I|}}{\partial_{x_1}^{i_1} \cdots \partial_{x_n}^{i_n}}\right|_e, \quad \delta := \partial_{(0,\ldots,0)}\big|_e : f \longmapsto f(e)$$

así

$$\partial_I|_e(x^J) := \begin{cases} 0 & \text{si } J \neq I \\ I! & \text{si } J = I \end{cases}$$

Puesto que la característica de los números reales es cero, el conjunto $\{\partial_I|_e \mid I \in \mathbb{N}^n\} \subseteq C_e(M)^*$ es un subconjunto $\mathbb{K}$-linealmente independiente.

Definición 8. *El conjunto de distribuciones en M con soporte en e es el espacio vectorial*

$$C_e(M)' := \mathbb{K}\langle \partial_I|_e \mid I \in \mathbb{N}^n \rangle \subseteq C_e(M)^*.$$

Es importante observar que si la dimensión de M es ≥ 1 entonces $C_e(M)'$ es un espacio de dimensión infinita.

Definición 9. *Dada una aplicación $\varphi\colon M \longrightarrow N$ analítica en e (es decir, en un entorno de e), definimos la linealización de φ:*

$$\begin{array}{rcl} \varphi'\colon C_e(M)' & \longrightarrow & C_{\varphi(e)}(N)' \\ \mu & \longmapsto & \varphi'(\mu)\colon\ f \ \longmapsto\ \mu(f\circ\varphi) \end{array}$$

Esta aplicación está bien definida gracias a la regla de la cadena pues $\partial_I|_e(f\circ\varphi)$ es una combinación lineal de operadores $\partial_J|_{\varphi(e)}$ aplicados a f.

Proposición 10. *La aplicación de linealización $\varphi \longmapsto \varphi'$ cumple:*

1. $\mathrm{Id}'_M = \mathrm{Id}_{C_e(M)'}$ *y*
2. $(\psi\circ\varphi)' = \psi'\circ\varphi'$.

Al linealizar aplicaciones no perdemos información si solamente estamos interesados en entornos suficientemente pequeños de e. Puesto que el enfoque que seguimos es en efecto local, obviaremos las posibilidades que nos brinda el principio de prolongación analítica en los casos en que la variedad sea conexa.

Proposición 11. *Sean $\varphi, \phi\colon M \longrightarrow N$ dos aplicaciones analíticas en $e \in M$ tales que $\varphi(e) = \phi(e)$. Se tiene que existe un entorno U de e tal que $\varphi|_U = \phi|_U$ si y solamente si $\varphi' = \phi'$.*

Demostración. Sean $y_1, ..., y_k\colon N \longrightarrow \mathbb{K}$ las funciones coordenadas correspondientes a un entorno coordenado de $\varphi(e)$. Se tiene

$$\varphi'(\partial_I|_e)(y_i) := \partial_I|_e(y_i\circ\varphi) = \partial_I|_e(\varphi_i)$$

donde $\varphi_i := y_i\circ\varphi$. Esto nos dice que podemos recuperar todos los coeficientes de la serie de Taylor de φ –por simplicidad puede pensarse que M y N son entornos del origen de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente– y así que φ queda determinada por φ' en un entorno de e. $\square$

Proposición 12. *Si $\dim M = 0$, es decir M es discreto, entonces $C_e(M) = \mathbb{K}\langle f_e\rangle$ y $C_e(M)' = \mathbb{K}\langle\delta\rangle$ donde $f_e\colon M \longrightarrow \mathbb{K}$, $f_e(e) = 1$, $\delta\colon C_e(M) \longrightarrow \mathbb{K}$ $\delta(\lambda f_e) = \lambda$. En particular tanto $C_e(M)$ como $C_e(M)'$ son espacios vectoriales de dimensión uno isomorfos a $\mathbb{K}$.*

Proposición 13. *La aplicación $C_{e_1}(M)'\otimes C_{e_2}(N)' \longrightarrow C_{(e_1,e_2)}(M\times N)'$ que envía $\mu\otimes\nu$ a la distribución*

$$\mu\otimes\nu\colon\ f(x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_n)) \longmapsto \mu(\nu(f(x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_n)))$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales, es decir,

$$C_{(e_1,e_2)}(M \times N)' \cong C_{e_1}(M)' \otimes C_{e_2}(N)'.$$

Demostración. Puesto que la aplicación es claramente lineal, basta comprobar que envía una base del espacio de salida a una base del espacio de llegada, lo cual es obvio ya que

$$\left.\frac{\partial^{i_1}}{\partial^{i_1}_{x_1}} \cdots \frac{\partial^{i_n}}{\partial^{i_n}_{x_n}}\right|_{e_1} \otimes \left.\frac{\partial^{j_1}}{\partial^{j_1}_{y_1}} \cdots \frac{\partial^{j_m}}{\partial^{j_m}_{y_m}}\right|_{e_2} \longmapsto \left.\frac{\partial^{i_1}}{\partial^{i_1}_{x_1}} \cdots \frac{\partial^{i_n}}{\partial^{i_n}_{x_n}} \frac{\partial^{j_1}}{\partial^{j_1}_{y_1}} \cdots \frac{\partial^{j_m}}{\partial^{j_m}_{y_m}}\right|_{(e_1,e_2)}.$$

□

En particular, si tomamos $N = \mathbb{K}^0 = \{0\}$ entonces

$$C_{(e,0)}(M \times \mathbb{K}^0) \cong C_e(M)' \otimes C_0(\mathbb{K}^0)' \cong C_e(M)'$$

El isomorfismo, visto de derecha a izquierda, queda determinado por

$$\partial_I|_e \longleftrightarrow \partial_I|_e \otimes \delta \longleftrightarrow \partial_I|_e \otimes \delta : f(x_1, ..., x_n; 0) \longmapsto \partial_I|_e(f(x_1, ..., x_n; 0))$$

que es exactamente el mismo que la linealización de la aplicación $\theta \colon M \times \mathbb{K}^0 \longrightarrow M$ ya que

$$\theta'(\partial_I|_e \otimes \delta)(f(x_1, ..., x_n)) = \partial_I|_e \otimes \delta(f(x_1, ..., x_n; 0) = \partial_I|_e(f).$$

Proposición 14. *Dadas $\varphi \colon M_1 \longrightarrow N_1$, $\psi \colon M_2 \longrightarrow N_2$ aplicaciones analíticas en e_1 y e_2 respectivamente y $\varphi \times \psi \colon M_1 \times M_2 \longrightarrow N_1 \times N_2$ su producto cartesiano, que es analítica en (e_1, e_2), se cumple que $(\varphi \times \psi)' = \varphi' \otimes \psi'$*

Demostración. Mediante el isomorfismo mostrado en la Proposición 13 tenemos que $(\varphi \times \psi)' : C_{e_1}(M_1)' \otimes C_{e_2}(M_2)' \longrightarrow C_{\varphi(e_1)}(N_1)' \otimes C_{\varphi(e_2)}(N_2)'$ viene dado por

$$\begin{aligned}(\varphi \times \psi)'(\partial_I|_{e_1} \otimes \partial_J|_{e_2})(f) &= (\partial_I|_{e_1} \otimes \partial_J|_{e_2})(f(\varphi(x), \psi(y)) \\ &= \varphi'(\partial_I|_{e_1}) \otimes \psi'(\partial_J|_{e_2})(f)\end{aligned}$$

lo que prueba el enunciado. □

Vamos a ver ahora unos ejemplos de linealización de algunas aplicaciones usuales.

Aplicación constante. La linealización de la aplicación constante

$$\begin{aligned} c\colon M &\longrightarrow \mathbb{K}^0 = \{e\} \\ x &\longmapsto e \end{aligned}$$

es la aplicación $\epsilon\colon C_e(M)' \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$\epsilon(\partial_I|_e)(\lambda f_e) = \partial_I|_e(\lambda 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } I \neq (0,...,0) \\ \lambda & \text{si } I = (0,...,0) \end{cases}$$

Así pues se tiene que su linealización ϵ es $\epsilon(\partial_I|_e) = 0$ si $I \neq (0,..,0)$ y $\epsilon(\delta) = \delta$.

Inclusión. La linealización de la aplicación inclusión

$$\begin{aligned} i\colon \mathbb{K}^0 &\longrightarrow M \\ e &\longmapsto e \end{aligned}$$

es la aplicación $u := i'\colon \mathbb{K} \cong \mathbb{K}\langle\delta\rangle \longrightarrow C_e(M)'$ dada por:

$$u(\lambda\delta)(f) = (\lambda\delta)(f \circ i) = (\lambda\delta)f(e) = \lambda f(e).$$

Por tanto $u(\lambda) = \lambda\delta$.

Proyección. La linealización de la proyección

$$\begin{aligned} \pi\colon M \times N &\longrightarrow M \\ (x,y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

la podemos obtener a partir del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\mathrm{Id} \times c"] \arrow[dr, "\pi"'] & M \times \mathbb{K}^0 \arrow[d, "\theta"] \\ & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (x,y) \arrow[r] \arrow[dr] & (x,e) \arrow[d] \\ & x \end{tikzcd}$$

Tenemos que $\pi' = \theta' \circ (\mathrm{Id} \otimes c')$ por lo que $\pi'(\mu \otimes \nu) = \theta'(\mu \otimes \epsilon(\nu)) = \epsilon(\nu)\mu$ y

$$\pi'(\mu \otimes \nu) = \epsilon(\nu)\mu.$$

Si considerásemos la proyección en N en vez de en M obtendríamos que la linealización sería la aplicación $\mu \otimes \nu \longmapsto \epsilon(\mu)\nu$.

Duplicación. La linealización de la aplicación duplicación

$$\begin{aligned} d\colon M &\longrightarrow M \times M \\ x &\longmapsto (x,x) \end{aligned}$$

es especialmente interesante. Se trata de una aplicación

$$\begin{aligned} \Delta := d'\colon C_e(M)' &\longrightarrow C_e(M)' \otimes C_e(M)' \\ \mu &\longmapsto \textstyle\sum \mu_{(1)} \otimes \mu_{(2)} \end{aligned}$$

muy relacionada con la forma en la que aplicamos derivadas iteradas a un producto de funciones. En efecto, si $h(x,y) = f(x)g(y)$ tenemos

$$\begin{aligned}\mu(fg) &= \mu(f(x)g(x)) = \mu(h(x,y)\circ d) = d'(\mu)(h) = \Delta(\mu)(h)\\ &= \sum \mu_{(1)}\otimes\mu_{(2)}(h) = \sum \mu_{(1)}\otimes\mu_{(2)}(f(x)g(y))\\ &= \sum \mu_{(1)}(f)\mu_{(2)}(g)\end{aligned}$$

Así pues, la linealización de la duplicación actúa de la siguiente manera

$$\mu(fg) = \sum \mu_{(1)}(f)\mu_{(2)}(g).$$

Cambio de orden. La linealización de la aplicación

$$\begin{aligned}\tau\colon M\times N &\longrightarrow N\times M\\ (x,y) &\longmapsto (y,x)\end{aligned}$$

es la aplicación $\tau' : C_{e_1}(M)'\otimes C_{e_2}(N)' \longrightarrow C_{e_2}(N)'\otimes C_{e_1}(M)'$ dada por

$$\tau'(\mu\otimes\nu)(f) = \tau'(\mu\otimes\nu)(f(x,y)) = (\mu\otimes\nu)(f(y,x)) = (\nu\otimes\mu)(f).$$

Es decir,

$$\tau'(\mu\otimes\nu) = \nu\otimes\mu.$$

Proposición 15. *Se tiene:*

1. $(C_e(M)',\Delta,\epsilon)$ *es una coálgebra coasociativa y coconmutativa*
2. *Si* $\varphi\colon M\longrightarrow N$ *es analítica en* e *entonces su linealización* φ' *es un morfismo de coálgebras*
3. *Cualquier aplicación* $m\colon M\times M\longrightarrow M$ *analítica en* (e,e) *tal que* $m(x,e) = x = m(e,x)$ *define una biálgebra* $(C_e(M)',\Delta,\epsilon,m',u)$.

Demostración. 1) Es fácil ver que el siguiente diagrama, y por tanto su linealización (parte de la derecha), conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & M\times M \arrow[d, "\mathrm{Id}\times c"] \\ M & M\times\mathbb{K}^0 \arrow[l, "\theta"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mu \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & \sum\mu_{(1)}\otimes\mu_{(2)} \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\epsilon"] \\ \sum\epsilon(\mu_{(1)})\mu_{(2)} & \sum\mu_{(1)}\otimes\epsilon(\mu_{(2)}) \arrow[l, "\theta'"] \end{tikzcd}$$

lo que demuestra que $\sum\mu_{(1)}\epsilon(\mu_{(2)}) = \mu$. Del mismo modo obtenemos que $\sum\epsilon(\mu_{(1)})\mu_{(2)} = \mu$, lo que demuestra que $(C_e(M)',\Delta,\epsilon)$ es una coálgebra. Además como los diagramas siguientes también conmutan, mirando a sus linealizaciones (parte de la derecha)

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "d"] & M \times M \arrow[r, "\mathrm{Id}\times d"] & M \times M \times M \arrow[d, equal] \\
& M \times M \arrow[r, "d\times\mathrm{Id}"] & M \times M \times M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mu \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"] & \sum \mu_{(1)} \otimes \mu_{(2)} \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes\Delta"] & \sum \mu_{(1)} \otimes \mu_{(2)(1)} \otimes \mu_{(2)(2)} \arrow[d, equal] \\
& \sum \mu_{(1)} \otimes \mu_{(2)} \arrow[r, "\Delta\otimes\mathrm{Id}"] & \sum \mu_{(1)(1)} \otimes \mu_{(1)(2)} \otimes \mu_{(2)}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d"] & M \times M \arrow[d, "\tau"] \\
M \times M \arrow[r, equal] & M \times M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mu \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & \sum \mu_{(1)} \otimes \mu_{(2)} \arrow[d, "\tau'"] \\
\sum \mu_{(1)} \otimes \mu_{(2)} \arrow[r, equal] & \sum \mu_{(2)} \otimes \mu_{(1)}
\end{tikzcd}$$

podemos concluir que $(C_e(M)', \Delta, \epsilon)$ es coasociativa y coconmutativa.

2) Dada una aplicación $\varphi\colon M \longrightarrow N$ analítica en e los diagramas

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\varphi"] & M \times M \arrow[d, "\varphi\times\varphi"] \\
N \arrow[r, "d"] & N \times N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "c"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathbb{K}^0 \arrow[d, equal] \\
N \arrow[r, "c"] & \mathbb{K}^0
\end{tikzcd}$$

conmutan, por lo que linealizando

$$\begin{tikzcd}
\mu \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\varphi'"] & \sum \mu_{(1)} \otimes \mu_{(2)} \arrow[d, "\varphi'\otimes\varphi'"] \\
\varphi'(\mu) \arrow[r, "\Delta"] & \Delta(\varphi'(\mu)) = \sum \varphi'(\mu_{(1)}) \otimes \varphi'(\mu_{(2)})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mu \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\varphi'"] & \epsilon(\mu)\delta \arrow[d, equal] \\
\varphi'(\mu) \arrow[r, "\epsilon"] & \epsilon(\varphi'(\mu))\delta
\end{tikzcd}$$

Esto prueba que φ' es un morfismo de coálgebras.

3) Dada una aplicación $m\colon M \times M \longrightarrow M$ analítica en (e, e) su linealización $m'\colon C_e(M)' \otimes C_e(M)' \longrightarrow C_e(M)'$ puede verse como un producto bilineal y, por la propiedad anterior, también como un morfismo de coálgebras. A su vez, como $m(e, x) = x = m(x, e)$, usando la linealización del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^0 \times M \arrow[r, "i\times\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\theta"] & M \times M \arrow[d, "m"] \\
M \arrow[r, equal] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\delta \otimes \mu \arrow[r, "u\otimes\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\theta'"] & \delta \otimes \mu \arrow[d, "m'"] \\
\mu \arrow[r, equal] & m'(\delta \otimes \mu)
\end{tikzcd}$$

tenemos que $m'(\delta \otimes \mu) = \mu$. Igualmente se cumple que $m'(\mu \otimes \delta) = \mu$ por lo que $(C_e(M)', \Delta, \epsilon, m', u)$ es una biálgebra. $\square$

Además de las propiedades que acabamos de ver, según como sea la aplicación m podemos obtener otras propiedades extra de $(C_e(M)', \Delta, \epsilon, m', u)$ sin más que linealizar diagramas conmutativos. Diremos que m es unitario para referirnos a la propiedad $m(x, e) = x = m(e, x)$.

En lo siguiente siempre asumiremos que m es unitario.

Corolario 16. *Si m es asociativo, es decir, el diagrama siguiente conmuta*

$$\begin{tikzcd} M \times M \times M \arrow[r, "m \times \mathrm{Id}"] \arrow[dr, "\mathrm{Id} \times m"'] & M \times M \arrow[r, "m"] & M \arrow[d, equal] \\ & M \times M \arrow[r, "m"] & M \end{tikzcd}$$

entonces la biálgebra $(C_e(M)', \Delta, \epsilon, m', u)$ es asociativa.

Corolario 17. *Si el producto m en M además de ser asociativo y unitario cumple que tiene inversos, es decir, existe $s\colon x \longmapsto x^{-1}$ tal que los diagramas*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & M \times M \arrow[d, "\mathrm{Id} \times s"'] \\ M & M \times M \arrow[l, "m"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & M \times M \arrow[d, "s \times \mathrm{Id}"'] \\ M & M \times M \arrow[l, "m"] \end{tikzcd}$$

son conmutativos entonces $(C_e(M)', \Delta, \epsilon, m', u, s')$ es un álgebra de Hopf.

Aunque la existencia de inversos es natural en el contexto de grupos, sin embargo, en el caso de productos unitarios asociativos es innecesario ya que es una consecuencia del Teorema de la función implícita, o de la aplicación inversa formulado para aplicaciones analíticas.

Teorema 18 (Teorema de la aplicación inversa)**.** *Sea $\varphi\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación analítica de un entorno abierto U de $e \in \mathbb{R}^n$. Si el jacobiano de φ en e no es nulo entonces existe un entorno abierto $U_1 \subseteq U$ tal que $\varphi(U_1)$ es entorno abierto de $\varphi(e_1)$ y $\varphi|_{U_1}\colon U_1 \longrightarrow \varphi(U_1)$ es un difeomorfismo analítico.*

Teorema 19 (Teorema de la función implícita)**.** *Sea*

$$\begin{array}{rcl} F\colon W \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ (x, y) & \longmapsto & F(x, y) \end{array}$$

una aplicación analítica de un entorno abierto W de $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^m$. Si el jacobiano de $F(a, y)$ en b no es nulo entonces existe un entorno abierto U de a y una única aplicación analítica $\varphi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $U \times \{b\} \subseteq W$

y $F(x, \varphi(x)) = F(a, b)$ para todo $x \in U$.

Teorema 20. *Si $m\colon M \times M \longrightarrow M$ es una aplicación analítica en (e, e), $m(x, e) = x = m(e, x)$ y m, visto como producto, es asociativo entonces existen automáticamente inversos para elementos en un entorno suficientemente pequeño de e.*

Demostración. Como $m(e, y) = y$, el jacobiano de $m(e, y)$ en e no es nulo. Por el teorema de la función implícita existe un entorno abierto U_2 de e y $s_2 : U_2 \longrightarrow M$ analítica tal que

$$m(x, s_2(x)) = m(e, e) = e$$

Denotando $m(x, y)$ por xy tenemos que $xs_2(x) = e$. Podemos hacer exactamente el mismo proceso pero con $m(x, e)$ pues su jacobiano tampoco es nulo en e y así existe un entorno abierto U_1 de e y $s_1\colon U_1 \longrightarrow M$ tal que

$$m(s_1(y), y) = m(e, e) = e.$$

Por tanto, igual que antes, $s_1(y)y = e$. Así, para x en un entorno de e suficientemente pequeño se cumple, por la asociatividad de m, que

$$s_1(x)(xs_2(x)) = \begin{cases} s_1(x)e = s_1(x) \\ \\ (s_1(x)x)s_2(x) = es_2(x) = s_2(x) \end{cases}$$

Concluimos que existe un entorno abierto U de e y $s\colon U \longrightarrow M$ analítica tal que $xs(x) = e = s(x)x$ para todo $x \in U$. $\square$

1.3. Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

Primero presentaremos un ejemplo sencillo de álgebra de Hopf obtenida mediante el procedimiento de linealización.

Ejemplo. Consideremos $m\colon \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $m(x, y) := x + y$ que es una aplicación conmutativa y asociativa, y por tanto tras linealizarla utilizando como punto base $e := (0, \ldots, 0)$ obtendremos un álgebra de Hopf de dimensión infinita. Tenemos que:

$$\begin{aligned} m'(\partial_I|_e, \partial_J|_e)(f) &= (\partial_I|_e \otimes \partial_J|_e)(f \circ m) = (\partial_I|_e \otimes \partial_J|_e)(f(x + y)) \\ &= \partial_I|_e(\partial_J(f)) = \partial_I\partial_J|_e(f) = \partial_{I+J}|_e(f) \end{aligned}$$

ya que dada una función $g(t)$ tenemos que $\frac{d^j}{ds^j}|_{s=0}(g(t+s)) = \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}|_{s=0}g'(t+s) = ... = \frac{d^j}{dt^j}(g)$. Así pues

$$m'(\partial_I|_e, \partial_J|_e) = \partial_{I+J}|_e.$$

Por otro lado, si definimos $s\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ dada por $s(x) := -x$ entonces tenemos

$$s'(\partial_I|_e)(f) = \partial_I|_e(f \circ s) = \partial_I|_e(f(-x)) = (-1)^{|I|}\partial_I|_e(f)$$

por lo que

$$s'(\partial_I|_e) = (-1)^{|I|}\partial_I|_e.$$

Así, $(C_e(M)', \Delta, \epsilon, m', u, s')$ es un álgebra de Hopf conmutativa y asociativa. De hecho, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} C_e(M)' & \longrightarrow & \mathbb{K}[x_1, ..., x_n] \\ \partial_I|_e & \longmapsto & x^I \end{array}$$

es un isomorfismo de álgebras. A través de esta identificación s se corresponde con

$$x^I \longmapsto (-1)^{|I|}x^I.$$

Por otro lado Δ se identifica con el único homomorfismo de álgebras

$$\mathbb{K}[x_1, ..., x_m] \longrightarrow \mathbb{K}[x_1, ..., x_m] \otimes \mathbb{K}[x_1, ..., x_m]$$

tal que

$$1 \longmapsto 1 \otimes 1 \quad \text{y} \quad x_i \longmapsto x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i$$

y la counidad se corresponde con la evaluación en $e = (0, ..., 0)$. Así pues, solamente con la suma de $\mathbb{K}^n$ acabamos de encontrar una estructura de álgebra de Hopf en $\mathbb{K}[x_1, ..., x_m]$. Esta estructura es la usual que se considera en distintos contextos. □

Proposición 21. *Sea $m\colon M \times M \longrightarrow M$ un producto analítico en e con $m(x, e) = x = m(e, x)$. Se cumple que*

$$m'(\partial_I|_e, \partial_J|_e) = \partial_{I+J}|_e + \text{combinación lineal de } \partial_K|_e \text{ con } |K| < |I + J|$$

Demostración. Podemos asumir que $M \subseteq \mathbb{K}^n$ y que $e = (0, \ldots, 0)$. Puesto que $m(x, e) = e$, $m(e, y) = y$ entonces la expresión de $m(x, y)$ en serie de potencias en el punto e es de la forma

$$m(x, y) = x + y + r(x, y)$$

con $r(e, y) = e = r(x, e)$. Escribimos

$$m'(\partial_I|_e, \partial_J|_e)) = \textstyle\sum_K \alpha_K \partial_K|_e$$

para ciertos α_K. Para determinar los escalares α_K observamos primero que $m'(\partial_I|_e, \partial_J|_e)(x^K) = K!\alpha_K$ por lo que

$$\begin{aligned} K!\alpha_K &= m'(\partial_I|_e, \partial_J|_e)(x^K) = \partial_I|_e \otimes \partial_J|_e (m_1^{k_1}(x,y) \cdots m_n^{k_n}(x,y)) \\ &= \partial_I|_e \otimes \partial_J|_e ((x_1 + y_1 + r_1(x,y))^{k_1} \cdots (x_n + y_n + r_n(x,y))^{k_n}) \end{aligned}$$

donde $m_i(x,y)$ es la i-ésima componente de $m(x,y)$ y $K = (k_1, \ldots, k_n)$. Si $|K| \geq |I + J|$ entonces cualquier sumando de

$$(x_1 + y_1 + r_1(x,y))^{k_1} \cdots (x_n + y_n + r_n(x,y))^{k_n}$$

que contenga algún $r_i(x,y)$ tendrá grado mayor que $|K| \geq |I + J|$ y por lo tanto al aplicarle $\partial_I|_e \otimes \partial_J|_e$ dará 0. Así pues si $|K| \geq |I + J|$ entonces

$$K!\alpha_K = \partial_I|_e \otimes \partial_J|_e ((x_1 + y_1)^{k_1} \cdots (x_m + y_n)^{k_n}) = \begin{cases} 0 \text{ si } K \neq I + J \\ \\ K! \text{ si } K = I + J \end{cases}$$

Por tanto $\alpha_{I+J} = 1$ y $\alpha_K = 0$ si $|K| \geq |I + J|$ pero $K \neq I + J$. $\square$

Para trabajar con bases adecuadas de $C_e(M)'$ conviene fijar la siguiente notación:

$$\mu * \nu := m'(\mu, \nu) \quad \text{y} \quad \partial_I^*|_e := (((\underbrace{(\partial_1|_e * \partial_1|_e) \cdots \partial_1|_e}_{i_1}) * \underbrace{\partial_2|_e) * \cdots}_{i_2} \underbrace{\cdots\cdots) * \partial_n|_e}_{i_n}$$

Como consecuencia del resultado anterior logramos

Proposición 22. *Sea $m\colon M \times M \longrightarrow M$ un producto analítico en e tal que $m(x,e) = x = m(e,x)$. Se tiene que*

$$\partial_I^*|_e = \partial_I|_e + \text{ una combinación lineal de } \partial_K|_e \text{ con } |K| < |I|.$$

Teorema 23 (Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt para productos unitarios)**.** *Sea $m\colon M \times M \longrightarrow M$ un producto analítico en e tal que $m(x,e) = x = m(e,x)$. El conjunto de elementos $\{\partial_I^*|_e \mid I \in \mathbb{N}^n\}$ es una base de $C_e(M)'$.*

Corolario 24. *Los elementos $\{\partial_1|_e, ..., \partial_n|_e\}$ generan $C_e(M)'$ como álgebra unitaria y además son linealmente independientes.*

Proposición 25. *Sea $m\colon M\times M\longrightarrow M$ un producto analítico en e tal que $m(x,e)=x=m(e,x)$. Se tiene que*

$$\Delta(\partial^*_I|_e)=\sum_{J_1+J_2=I}\binom{I}{J_1}\partial^*_{J_1}|_e\otimes\partial^*_{J_2}|_e$$

donde $\binom{I}{J_1}:=\binom{i_1}{j_1}\cdots\binom{i_n}{j_n}$.

Demostración. Basta usar que Δ es un homomorfismo de álgebras y que $\Delta(\partial_i|_e)=\partial_i|_e\otimes\delta+\delta\otimes\partial_i|_e$ para obtener

$$\begin{aligned}\Delta(\partial^*_I|_e)&=(((\Delta(\partial_1|_e)*\cdots*\Delta(\partial_1|_e))*\Delta(\partial_2|_e)*\cdots)*\Delta(\partial_n|_e))\\&=\sum_{J_1+J_2=I}\binom{I}{J_1}\partial^*_{J_1}|_e\otimes\partial^*_{J_2}|_e.\end{aligned}$$

□

Es interesante también conocer la fórmula de la comultiplicación Δ en la base $\{\partial_I|_e\mid I\in\mathbb{N}^n\}$. Usando que Δ es la linealización de la aplicación duplicación y la regla de Leibniz para derivadas:

$$\begin{aligned}\sum\partial_I|_{e(1)}(f)\partial_I|_{e(2)}(g)=\Delta(\partial_I|_e)(f(x)g(y))&=\partial_I|_e(f(x)g(x))\\&=\sum_{I=J_1+J_2}\binom{I}{J_1}\partial_{J_1}|_e(f)\partial_{J_2}|_e(g).\end{aligned}$$

Dada ahora una función $h\colon M\times M\longrightarrow\mathbb{K}$ analítica en (e,e) y $p(x,y)$ su polinomio de Taylor de grado $\leq|I|$, el cual es una combinación lineal de expresiones de tipo $f(x)g(y)$, tenemos

$$\begin{aligned}\Delta(\partial_I|_e)(h)&=\partial_I|_e(h(x,x))=\partial_I|_e(p(x,x))=\Delta(\partial_I|_e)(p)\\&=\sum_{I=J_1+J_2}\binom{I}{J_1}\partial_{J_1}|_e\otimes\partial_{J_2}|_e(p)\sum_{I=J_1+J_2}\binom{I}{J_1}\partial_{J_1}|_e\otimes\partial_{J_2}|_e(h)\end{aligned}$$

por lo que la fórmula para la comultiplicación Δ en la base $\{\partial_I|_e\mid I\in\mathbb{N}^n\}$ es

$$\Delta(\partial_I|_e)=\sum_{I=J_1+J_2}\binom{I}{J_1}\partial_{J_1}|_e\otimes\partial_{J_2}|_e.\tag{1.1}$$

Ejemplo. Vamos a desarrollar un ejemplo relativo al calculo de estas bases usando un producto que es asociativo pero no conmutativo. Consideramos el conjunto de matrices

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_1^{-1} \end{bmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, x_2 \in \mathbb{K} \right\}$$

que es un grupo con el producto usual de matrices. Si realizamos la identificación

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_1^{-1} \end{bmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, x_2 \in \mathbb{K} \right\} \longleftrightarrow (x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 =: M$$

entonces podemos definir un producto $m \colon M \times M \longrightarrow M$ dado por

$$m((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1^{-1})$$

que en un entorno de $e := (1, 0)$ es asociativo y unitario, por lo que, $C_e(M)'$ es un álgebra de Hopf pero no será conmutativa ya que m no lo es.

Calcularemos $\partial_1|_e * \partial_2|_e$, lo cual por lo que ya hemos visto, sabemos que va a ser de la forma $\partial_1\partial_2|_e + \alpha_1\partial_1|_e + \alpha_2\partial_2|_e + \alpha_0\delta$ para ciertos $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$. Para determinarlos observamos que

$$\begin{aligned}
\partial_1|_e * \partial_2|_e(f) &= \partial_1|_e \otimes \partial_2|_e(f \circ m((x_1, x_2), (y_1, y_2))) \\
&= \partial_1|_e \otimes \partial_2|_e(f(x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1^{-1})) \\
&= \partial_2|_{y=e} \left(\partial_1|_{x=e}(f(x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1^{-1}))\right) \\
&= \partial_2|_{y=e}((\partial_1|_{m(e,y)} f)\partial_1|_{x=e}(x_1 y_1) \\
&\quad + (\partial_2|_{m(e,y)} f)\partial_1|_{x=e}(x_1 y_2 + x_2 y_1^{-1})) \\
&= \partial_2|_{y=e}((\partial_1|_y f) y_1 + (\partial_2|_y f) y_2) \\
&= \partial_2\partial_1|_e(f) + \partial_2|_e f
\end{aligned}$$

ya que $e = (1, 0)$, donde la notación $\partial_i|_{x=e}$ indica que se deriva con respecto a x_i y tras ello se evalúa x en e (y el mismo convenio se sigue para $\partial_i|_{y=e}$). Por lo tanto $\partial_1|_e * \partial_2|_e = \partial_2\partial_1|_e + \partial_2|_e$. Del mismo modo obtenemos que

$$\begin{aligned}
\partial_2|_e * \partial_1|_e(f) &= \partial_2|_e \otimes \partial_1|_e(f(x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1^{-1})) \\
&= \partial_1|_{y=e}\partial_2|_{x=e}(f(x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1^{-1})) \\
&= \partial_1|_{y=e}((\partial_1|_{m(e,y)} f)\partial_2|_{x=e}(x_1 y_1) \\
&\quad + (\partial_2|_{m(e,y)} f)\partial_2|_{x=e}(x_1 y_2 + x_2 y_1^{-1})) \\
&= \partial_1|_{y=e}(0 + (\partial_2|_y f) y_1^{-1}) \\
&= \partial_1\partial_2|_e(f) - \partial_2|_e f
\end{aligned}$$

por lo que $\partial_2|_e * \partial_2|_e = \partial_1\partial_2|_e - \partial_2|_e$.

Definición 26 (Conmutador)**.** *En un álgebra, el conmutador de dos elementos a, b, es el elemento $[a, b] := ab - ba$.*

En el ejemplo que estamos desarrollando tenemos que

$$[\partial_1|_e, \partial_2|_e] = \partial_1|_e * \partial_2|_e - \partial_2|_e * \partial_1|_e = 2\partial_2|_e.$$

$\square$

Es importante observar que aunque $\partial_i|_e * \partial_j|_e$ no es combinación lineal de $\partial_1|_e, ..., \partial_n|_e$, los conmutadores $[\partial_i|_e, \partial_j|_e]$ sí lo son. Gracias a esto podemos calcular fácilmente a partir de los conmutadores cómo se multiplican los elementos de la base de Poincaré-Birkhoff-Witt de $C_e(M)'$ para productos analíticos unitarios asociativos $m\colon M \times M \longrightarrow M$.

Ejemplo. Continuando con el ejemplo anterior, tenemos

$$\begin{aligned}(\partial_2|_e * \partial_2|_e) * \partial_1|_e &= \partial_2|_e * (\partial_2|_e * \partial_1|_e) = \partial_2|_e * (\partial_1|_e * \partial_2|_e - 2\partial_2|_e)\\ &= -2\partial_2|_e * \partial_2|_e + \partial_2|_e * \partial_1|_e * \partial_2|_e\\ &= -2\partial_2|_e * \partial_2|_e + (\partial_1|_e * \partial_2|_e) * \partial_2|_e - 2\partial_2|_e * \partial_2|_e\\ &= (\partial_1|_e * \partial_2|_e) * \partial_2|_e - 4\partial_2|_e * \partial_2|_e\end{aligned}$$

lo que expresa el producto $(\partial_2|_e * \partial_2|_e) * \partial_1|_e$ en términos de la base de Poincaré-Birkhoff-Witt.

Teorema 27. *Sea $m\colon M \times M \longrightarrow M$ un producto analítico unitario asociativo. La antípoda S del álgebra de Hopf $C_e(M)'$ queda determinada por*

$$S(\mu * \nu) = S(\nu) * S(\mu), \quad S(\delta) = \delta \otimes \delta \quad y \quad S(\partial_i|_e) = -\partial_i|_e.$$

Demostración. La antípoda S es la linealización de $x \longmapsto x^{-1}$. Ahora bien, al igual que para grupos, esta aplicación cumple que $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. Expresando esta igualdad en términos de diagramas y linealizando obtenemos $S(\mu * \nu) = S(\nu) * S(\mu)$. Puesto que $\{\partial_1|_e, ..., \partial_n|_e\}$ generan $C_e(M)'$ como álgebra, entonces S queda determinada por los valores de $S(\delta), S(\partial_1|_e), \ldots, S(\partial_n|_e)$.

Usando la propiedad que define a la antípoda, como $\Delta(\delta) = \delta \otimes \delta$ y $\Delta(\partial_i|_e) = \partial_i|_e \otimes \delta + \delta \otimes \partial_i|_e$, tenemos

$$S(\delta) * \delta = \epsilon(\delta)\delta = \delta$$

por lo que $S(\delta) = \delta$. Igualmente

$$S(\partial_i|_e) * \delta + S(\delta) * \partial_i|_e = \epsilon(\partial_i|_e)\delta = 0$$

por lo que $S(\partial_i|_e) = -\partial_i|_e$. $\square$

Ejemplo. Siguiendo con el grupo no conmutativo del ejemplo anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} S(\partial_1|_e * \partial_2|_e) &= S(\partial_2|_e) * S(\partial_1|_e) = (-\partial_2|_e) * (-\partial_1|_e) = \partial_2|_e * \partial_1|_e \\ &= \partial_1|_e * \partial_2|_e - 2\partial_2|_e \end{aligned}$$

$\square$

De este modo llegamos a una notable conclusión:

> *En el caso de productos analíticos asociativos y unitarios podemos reconstruir todas las operaciones del álgebra de Hopf asociada sin más que conocer las relaciones*
>
> $$[\partial_i|_e, \partial_j|_e] = \sum_k \alpha_{ij}^k \partial_k|_e.$$

Capítulo 2

Álgebras de Hopf asociativas

Los resultados teóricos de este capítulo pueden encontrarse en [5].

2.1. Álgebras de Lie

Definición 28 (Álgebra de Lie). *Llamamos álgebra de Lie a un espacio vectorial E, junto con una operación producto $[\ ,\ ]\colon E \otimes E \longrightarrow E$, llamada corchete de Lie, que cumple las siguientes propiedades*

1. $[x, y] = -[y, x]$
2. $[[x, y], z] = [[x, z], y] + [x, [y, z]]$

para todo $x, y, z \in E$

Proposición 29. *El par $(T_eM, [\ ,\ ])$, con $T_eM := \mathbb{K}\langle \partial_1|_e, ..., \partial_m|_e\rangle$ y la aplicación $[\ ,\ ]\colon T_eM \otimes T_eM \longrightarrow T_eM$ dada por $[\mu, \nu] := \mu * \nu - \nu * \mu$ asociado a un producto asociativo, unitario y analítico definido en un entorno de un punto e de una variedad analítica M es un álgebra de Lie.*

Demostración. Lo único que tenemos que probar es que el producto cumple las propiedades del corchete de Lie, para lo cual sabemos que el producto $*$ del álgebra de Hopf $C_e(M)'$ es asociativo. Por un lado se tiene $[\mu, \nu] =$

$\mu * \nu - \nu * \mu = -(\nu * \mu - \mu * \nu) = -[\nu, \mu]$ mientras que por otro

$$\begin{aligned}
&[[\mu, \nu], \eta] - [[\mu, \eta], \nu] - [\mu, [\nu, \eta]] \\
&\qquad = \{(\mu * \nu - \nu * \mu) * \eta - \eta * (\mu * \nu - \nu * \mu)\} \\
&\qquad\quad - \{(\mu * \eta - \eta * \mu) * \nu - \nu * (\mu * \eta - \eta * \mu)\} \\
&\qquad\quad - \{\mu * (\nu * \eta - \eta * \nu) - (\nu * \eta - \eta * \nu) * \mu\} = 0
\end{aligned}$$

□

Lema 30. *Se tiene que*

$$T_eM = \mathbb{K}\langle \partial_1|_e, ..., \partial_m|_e \rangle = \{\mu \in C_e(M)' \mid \Delta(\mu) = \mu \otimes \delta + \delta \otimes \mu\}.$$

Demostración. Debido a la fórmula para la comultiplicación (1.1) tenemos $\Delta(\partial_I|_e) = \sum_{I=J_1+J_2} \binom{I}{J_1} \partial_{J_1}|_e \otimes \partial_{J_2}|_e$. Puesto que el conjunto $\{\partial_I|_e \mid I \in \mathbb{N}^n\}$ es linealmente independiente, si $\Delta(\mu) = \mu \otimes \delta + \delta \otimes \mu$ entonces claramente $\mu \in T_eM$. Por otro lado, la misma fórmula muestra que si $\mu \in T_eM$ entonces $\Delta(\mu) = \mu \otimes \delta + \delta \otimes \mu$. □

Sean m_1 y m_2 dos productos asociativos, unitarios y analíticos definidos en entornos V_1 de $e_1 \in G_1$ y V_2 de $e_2 \in G_2$. Diremos que (G_1, m_1) es localmente isomorfo a (G_2, m_2) si existen $U_1 \subseteq V_1 \subseteq G_1$ y $U_2 \subseteq V_2 \subseteq G_2$ entornos abiertos de e_1 y e_2 respectivamente con $m_1(U_1, U_1) \subseteq V_1$, $m_2(U_2, U_2) \subseteq V_2$ y $\varphi\colon V_1 \longrightarrow V_2$ un difeomorfismo analítico tal que $\varphi(e_1) = e_2$ y $\varphi(m_1(x, y)) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = m_2(\varphi(x), \varphi(y))$ para todo $x, y \in U_1$.

En lo siguiente nos referiremos a (G_i, m_i) simplemente como G_i. También abusaremos de la notación y por lo general utilizaremos los mismos símbolos Δ, ϵ, $*$, S, δ para todas las distintas álgebras de Hopf que aparezcan asociadas a productos asociativos unitarios analíticos (G_i, m_i). Si cualquiera de estos símbolos viene acompañado por un subíndice i, será simplemente para enfatizar en qué álgebra de Hopf consideramos esa operación.

Proposición 31. *Si G_1 es localmente isomorfo a G_2 entonces $C_{e_1}(G_1)'$ y $C_{e_2}(G_2)'$ son álgebras de Hopf isomorfas y $T_{e_1}G_1$ y $T_{e_2}G_2$ son álgebras de Lie isomorfas.*

Demostración. Sea $\varphi\colon V_1 \longrightarrow V_2$ el difeomorfismo analítico tal que $\varphi(e_1) = e_2$ y $\varphi(m_1(x, y)) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = m_2(\varphi(x), \varphi(y))$. Por la Proposición 15, φ' es un isomorfismo de coálgebras. Ese isomorfismo es también un isomorfismo como álgebras ya que basta linealizar el diagrama que expresa la igualdad $\varphi(m_1(x, y)) = m_2(\varphi(x), \varphi(y))$ para observarlo. Además, dado $\mu \in T_{e_1}(G_1)$ se tiene que

$$\Delta(\mu) = \mu\otimes\delta + \delta\otimes\mu \Longrightarrow \Delta\varphi'(\mu) = \varphi'\otimes\varphi'\Delta(\mu) = \varphi'(\mu)\otimes\delta + \delta\otimes\varphi'(\mu)$$

por lo que φ' induce, por restricción, una aplicación lineal $\varphi'|_{T_{e_1}G_1}\colon T_{e_1}G_1 \longrightarrow T_{e_2}G_2$ que es biyectiva (su inversa es la inducida por la linealización de φ^{-1}).

Puesto que por el Teorema 27, la antípoda S_2 de $C_{e_2}(G_2)'$ queda determinada por $S_2(\mu*\nu) = S_2(\nu)*S_2(\mu)$, $S_2(\delta)$, $S_2(\partial_i|_{e_2}) = -\partial_i|_{e_2}$ pero $\varphi' S_1(\varphi')^{-1}$ también cumple estas mismas propiedades

$$\begin{aligned}
\varphi' S_1(\varphi')^{-1}(\mu*\nu) &= \varphi' S_1((\varphi')^{-1}(\mu)*(\varphi')^{-1}(\nu))\\
&= \varphi'(S_1((\varphi')^{-1}(\nu))*S_1((\varphi')^{-1}(\mu)))\\
&= \varphi'(S_1((\varphi')^{-1}(\nu)))*\varphi'(S_1((\varphi')^{-1}(\mu)))\\
\varphi' S_1(\varphi')^{-1}(\partial_i|_{e_2}) &= \varphi'(-(\varphi')^{-1}(\partial_i|_{e_2})) = -\partial_i|_{e_2}\\
\varphi' S_1(\varphi')^{-1}(\delta) &= \varphi' S_1(\delta) = \varphi'(\delta) = \delta
\end{aligned}$$

entonces $S_2 = \varphi' S_1(\varphi')^{-1}$ por lo que $\varphi' S_1(\mu) = S_2(\varphi'(\mu))$. Así pues φ' es un isomorfismo de álgebras de Hopf. Más aún,

$$\varphi'|_{T_{e_1}(G_1)}\colon T_{e_1}G_1 \longrightarrow T_{e_2}G_2$$

es también un isomorfismo de álgebras de Lie ya que

$$\varphi'([\mu,\nu]_1) = \varphi'(\mu*_1\nu-\nu*_1\mu) = \varphi'(\mu)*_2\varphi'(\nu)-\varphi'(\nu)*_2\varphi'(\mu) = [\varphi'(\mu),\varphi'(\nu)]_2$$

$\square$

Nota. Si $[\partial_i|_e,\partial_j|_e] = \sum_k \alpha_{ij}^k\partial_k|_e$, las constantes α_{ij}^k que determinan dicho producto se pueden obtener también como $\partial_i|_e\otimes\partial_j|_e(xyx^{-1}y^{-1})_k$, donde $(xyx^{-1}y^{-1})_k$ denota la k-ésima coordenada de $xyx^{-1}y^{-1}$, es decir, el escalar $x_k(xyx^{-1}y^{-1})$ con x_k la k-ésima función coordenada. Recordando las aplicaciones $s\colon x\longmapsto x^{-1}$, $d\colon x\longmapsto (x,x)$ y $\tau\colon (x,y)\longmapsto (y,x)$,

$$\begin{aligned}
\partial_i|_e\otimes\partial_j|_e(xyx^{-1}y^{-1})_k &= \partial_i|_e\otimes\partial_j|_e(m\circ(m\times(m\circ(s\times s)))\circ\tau\circ(d\times d))_k\\
&= ((m\circ(m\times(m\circ(s\times s)))\circ\tau\circ(d\times d))'(\partial_i|_e\otimes\partial_j|_e))(x_k)\\
&= m'\circ(m'\otimes(m'\circ(s'\otimes s')))(\partial_i|_e\otimes\partial_j|_e\otimes\delta\otimes\delta\\
&+ \partial_i|_e\otimes\delta\otimes\delta\otimes\partial_j|_e + \delta\otimes\partial_j|_e\otimes\partial_i|_e\otimes\delta\\
&+ \delta\otimes\delta\otimes\partial_i|_e\otimes\partial_j|_e)(x_k)\\
&= (\partial_i|_e*\partial_j|_e - \partial_j|_e*\partial_i|_e)(x_k) = [\partial_i|_e,\partial_j|_e](x_k) = \alpha_{ij}^k
\end{aligned}$$

es decir, el álgebra de Lie T_eG puede obtenerse directamente del producto m sin pasar por $C_e(G)'$, sin embargo, para operar con esta álgebra es mejor verla dentro de $C_e(G)'$ donde en lugar del producto de Lie $[\mu,\nu]$ podemos usar el producto asociativo $\mu*\nu$. $\square$

2.2. ¿Analítico o formal?

Las funciones que hemos considerado hasta ahora eran analíticas en un entorno de $e \in M$. Estas funciones vienen representadas por series de potencias convergentes $\sum_I \alpha_I x^I$ en términos de las coordenadas $x_1, \dots, x_m$. Si nos olvidamos de la convergencia, tenemos lo que se llama series formales, $f(x) := \sum_I \alpha_I x^I$, pero estas series no las podemos evaluar en puntos distintos de e –si asumimos que $x_i(e) = 0$, es decir, que trabajamos con un entorno centrado en e– ya que no podemos asegurar su convergencia. Sin embargo, formalmente sí que podemos imitar los cálculos que haríamos con series convergentes.

Sea $M = \mathbb{K}^m$ y $N = \mathbb{K}^n$. Una función formal $g\colon M \longrightarrow \mathbb{K}$ es una serie formal $\sum_I \alpha_I x^I$ en ciertas indeterminadas, cuyo nombre es irrelevante, $x_1, \dots, x_m$. Por analogía, puede pensarse que x_i es la i-ésima proyección de M en $\mathbb{K}$. Una aplicación formal $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)\colon M \longrightarrow N$ es una tupla de funciones formales $\varphi_j\colon M \longrightarrow \mathbb{K}$ cuyos términos independientes son nulos.

Al componer una aplicación formal $\varphi\colon M \longrightarrow N$ con una función formal $f\colon N \longrightarrow \mathbb{K}$ se obtiene otra función formal ya que

$$f \circ \varphi = \sum_I \alpha_I \varphi_1^{i_1} \cdots \varphi_n^{i_n}$$

es una función formal, pues como cada φ_j es una serie del tipo $\sum \beta_J x^J$ con término independiente nulo entonces $f \circ \varphi$ es una serie formal bien definida –la condición de que el término independiente sea nulo asegura que no aparecen sumas infinitas en $\mathbb{K}$–. Para funciones formales $f = \sum_I \alpha_I x^I$ y $e := (0, \dots, 0)$ podemos definir

$$\delta(f) := \partial_{(0,\dots,0)}|_e(f) := f(e) := \alpha_{(0,\dots,0)} \quad \text{y} \quad \partial_I|_e(f) := I!\alpha_I.$$

que no es nada más que extender a funciones formales la forma en que los elementos de $C_e(M)' = \mathbb{K}\langle \partial_I|_e \mid I \in \mathbb{N}^m \rangle$ operan sobre funciones analíticas. Una ventaja que tenemos con esto, es que ahora $\mathbb{K}$ puede ser un cuerpo arbitrario con $\operatorname{car} \mathbb{K} = 0$ en lugar del cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales y que todo lo que hemos visto hasta ahora en el caso analítico sigue siendo válido cuando las funciones y aplicaciones son formales y las distribuciones con soporte en e operan sobre funciones formales. En particular, cualquier aplicación formal $\varphi\colon M = \mathbb{K}^m \longrightarrow N = \mathbb{K}^n$ puede linealizarse mediante

$$\varphi'\colon \mu \longmapsto \varphi'(\mu)\colon f \longmapsto \mu(f \circ \varphi)$$

y se cumplen para $C_e(M)'$ y para φ' las distintas propiedades algebraicas que hemos visto hasta ahora en el caso analítico.

Sin embargo, la principal ventaja de considerar aplicaciones formales es que todo morfismo de coálgebras $\theta\colon C_e(M)' \longrightarrow C_e(N)'$ –aquí usamos el mismo símbolo e para el origen de M y el de N– es la linealización de alguna aplicación formal $\varphi\colon M \longrightarrow N$, algo que no podemos asegurar en el contexto analítico ya que las series de potencias que dan lugar a φ podrían no ser convergentes.

Proposición 32. *Sea $\theta\colon C_e(M)' \longrightarrow C_e(N)'$ un morfismo de coálgebras. Existe una única aplicación formal $\varphi\colon M \longrightarrow N$ tal que $\theta = \varphi'$.*

Demostración. En efecto, sean $x_i\colon M = \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}$ e $y_j\colon N = \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ la i-ésima y la j-ésima proyecciones respectivamente. Dada θ se define $\varphi(x) := (\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x))$ con

$$\varphi_j(x) := \sum_I \frac{\theta(\partial_I|_e)(y_j)}{I!} x^I.$$

Así se tiene que

$$\begin{aligned}
\varphi'(\partial_I|_e)(y^J) = \partial_I|_e(\varphi_1^{j_1} \cdots \varphi_n^{j_1}) &= \sum (\partial_I|_e)_{(1)}(\varphi_1) \cdots (\partial_I|_e)_{(j_1+\ldots+j_n)}(\varphi_n) \\
&= \sum \theta((\partial_I|_e)_{(1)})(y_1) \cdots \theta((\partial_I|_e)_{|J|})(y_n) \\
&= \sum (\theta(\partial_I|_e))_{(1)}(y_1) \cdots (\theta(\partial_I|_e))_{|J|}(y_n) \\
&= \theta(\partial_I|_e)(y^J)
\end{aligned}$$

Por tanto $\varphi'(\partial_I|_e)(y^J) = \theta(\partial_I|_e)(y^J)$ para todo J, es decir, $\varphi' = \theta$. La unicidad es consecuencia de la Proposición 11 o, si se prefiere, de su demostración. □

2.3. Clasificación de los grupos locales de Lie

Un producto asociativo unitario analítico (G, m) induce un álgebra de Hopf $C_e(G)'$ y un álgebra de Lie T_eG. La ventaja del álgebra de Lie es que tiene dimensión finita; la desventaja es que no es un álgebra asociativa. Sin embargo, durante todo el siglo XX se ha desarrollado una intensa investigación en estas estructuras y actualmente la falta de asociatividad de las álgebras de Lie es considerada más bien como una ventaja. Un aspecto que ha motivado su estudio es la observación con la que cerrábamos el capítulo inicial. El producto conmutador del álgebra de Lie T_eG determina salvo isomorfismo el álgebra de Hopf $C_e(G)'$, y por la Proposición 32, al menos formalmente, determina el producto m. De hecho, como vamos a ver, esta observación puede probarse también si se tiene en cuenta la convergencia. Por claridad, en la demostración asumiremos dos lemas necesarios que probaremos a posteriori.

Dados dos productos analíticos, asociativos y unitarios m_1, m_2 definidos en un entorno de $e = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^m$ sean $G_1 := (\mathbb{R}^m, m_1)$, $G_2 := (\mathbb{R}^m, m_2)$, llamados grupos locales de Lie, y denotemos por $*_1$ y $*_2$ los productos inducidos en $C_e(G_1)'$ y $C_e(G_2)'$ respectivamente, y por $(T_eG_1, [\ ,\ ]_1)$ y $(T_eG_2, [\ ,\ ]_2)$ las correspondientes álgebras de Lie.

Teorema 33. *Sean G_1 y G_2 dos grupos locales de Lie, estos son isomorfos si y solamente si las álgebras de Lie $(T_eG_1, [\ ,\ ]_1)$ y $(T_eG_2, [\ ,\ ]_2)$ son isomorfas.*

Demostración. Una de las afirmaciones la hemos probado en la Proposición 31. Así que demostraremos el recíproco.

Sea $\theta\colon T_eG_1 \longrightarrow T_eG_1$ un isomorfismo de álgebras de Lie, así pues, θ es una aplicación lineal, biyectiva y $\theta([\mu, \nu]_1) = [\theta(\mu), \theta(\nu)]_2$. Consideremos en T_eG_2 la base $\{\theta(\partial_1|_e), ..., \theta(\partial_m|_e)\}$. Si en $C_e(G_1)'$ tenemos que $\partial_i|_e *_1 \partial_j|_e = \partial_j|_e *_1 \partial_i|_e + \sum_k \alpha_{ij}^k \partial_k|_e$ entonces en $C_e(G_2)'$ se tendrá que

$$\begin{aligned}
\theta(\partial_i|_e) *_2 \theta(\partial_j|_e) &= \theta(\partial_j|_e) *_2 \theta(\partial_i|_e) + [\theta(\partial_i|_e), \theta(\partial_j|_e)]_2 \\
&= \theta(\partial_j|_e) *_2 \theta(\partial_i|_e) + \theta([\partial_i|_e, \partial_j|_e]_1) \\
&= \theta(\partial_j|_e) *_2 \theta(\partial_i|_e) + \sum_k \alpha_{ij}^k \theta(\partial_k|_e)
\end{aligned}$$

Por tanto, la forma en la que se multiplican $\partial_i|_e$ y $\partial_j|_e$ en $C_e(G_1)'$ se corresponde con la forma en que se multiplican $\theta(\partial_i|_e)$ y $\theta(\partial_j|_e)$ en $C_e(G_2)'$. Puesto que los elementos $\theta(\partial_I^{*_1}|_e) := \theta(\partial_1|_e) *_2 \cdots *_2 \theta(\partial_2|_e) *_2 \cdots *_2 \theta(\partial_m|_e)$ son una base de $C_e(G_2)'$ –véase el Lema 34 tras la demostración– esto implica que la aplicación

$$\theta\colon \partial_I^{*_1}|_e \longmapsto \theta(\partial_I^{*_1}|_e)$$

es un isomorfismo de álgebras entre $C_e(G_1)'$ y $C_e(G_2)'$. Además, como $\theta(\partial_i|_e) \in T_eG_2$, $\Delta(\theta(\partial_i|_e)) = \theta(\partial_i|_e) \otimes \delta + \delta \otimes \theta(\partial_i|_e)$ y, usando los mismos argumentos que para calcular $\Delta(\partial_I|_e)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta(\theta(\partial_I^{*_1}|_e)) &= \sum_{I_1+I_2=I} \theta(\partial_{I_1}^{*_1}|_e) \otimes \theta(\partial_{I_2}^{*_1}|_e) = \theta \otimes \theta(\Delta(\partial_I^{*_1}|_e)), \\
\epsilon(\theta(\partial_I^{*_1}|_e)) &= \epsilon(\partial_I^{*_1}|_e)
\end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
S\circ\theta\circ S(\mu *_1 \nu) &= S\circ\theta(S(\nu) *_1 S(\mu)) = S(\theta(S(\nu)) *_2 \theta(S(\mu)))\\
&= S(\theta(S(\mu))) *_2 S(\theta(S(\nu))),\\
S\circ\theta\circ S(\partial_i|_e) &= -S\circ\theta(\partial_i|_e) = \theta(\partial_i|_e)
\end{aligned}
$$

por lo que $S\circ\theta\circ S=\theta$ y así $\theta\circ S = S\circ\theta$. Es decir θ es un isomorfismo de álgebras de Hopf entre $C_e(G_1)'$ y $C_e(G_2)'$.

Por la Proposición 32 existe una única aplicación formal $\varphi\colon G_1 \longrightarrow G_2$ tal que $\theta = \varphi'$. Usando que φ' es un homomorfismo de álgebras entonces el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
C_e(G_1)'\otimes C_e(G_1)' \arrow[r, "*_1"] \arrow[d, "\varphi'\otimes\varphi'=\theta\otimes\theta"] & C_e(G_1)' \arrow[d, "\varphi'=\theta"] \\
C_e(G_2)'\otimes C_e(G_2)' \arrow[r, "*_2"] & C_e(G_2)'
\end{tikzcd}
$$

y por tanto también el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
G_1\times G_1 \arrow[r, "m_1"] \arrow[d, "\varphi\times\varphi"] & G_1 \arrow[d, "\varphi"] \\
G_2\times G_2 \arrow[r, "m_2"] & G_2
\end{tikzcd}
$$

ya que, por la Proposición 11 o su demostración, dos aplicaciones formales son iguales si y solamente si lo son sus linealizaciones. Así pues, $\varphi\circ m_1 = m_2\circ(\varphi\times\varphi)$ como aplicaciones formales.

Las series de potencias que definen a φ son convergentes en e –véase el Lema 35 tras la demostración– por lo que φ es una aplicación analítica en e. Además, $d\varphi(\partial_j|_e) = \sum \beta_{ij}\partial_i|_e$ donde (β_{ij}) es la matriz jacobiana y

$$
d\varphi(\partial_j|_e)(x_i) = \begin{cases} \beta_{ij} \\ \\ \partial_j|_e\varphi_i = \varphi'(\partial_j|_e)(x_i) = \theta(\partial_j|_e)(x_i) \end{cases}
$$

implica que $d\varphi|_e\colon T_eG_1 \longrightarrow T_eG_2$ es exactamente la aplicación $\theta\colon T_eG_1 \longrightarrow T_eG_2$. Puesto que por hipótesis θ es un isomorfismo lineal –de hecho lo es de álgebras de Lie– entonces $\varphi\colon G_1\longrightarrow G_2$ es un difeomorfismo local en e y $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$, es decir, G_1 es localmente isomorfo a G_2. $\square$

Lema 34. *Si $\{\mu_1, ..., \mu_n\}$ es una base de T_eG entonces*

$$\left\{ \mu_I^* := \underbrace{\mu_1 * \cdots}_{i_1} * \underbrace{\mu_2 * \cdots}_{i_2} \cdots \underbrace{\cdots * \mu_n}_{i_n} \mid I \in \mathbb{N}^n \right\}$$

es una base de $C_e(G)'$.

Demostración. Veamos que si cambiamos un único μ_i por $\bar{\mu}_i$ de modo que $\{\mu_1, ..., \bar{\mu}_i, ..., \mu_n\}$ siga siendo base de T_eG y consideramos $\bar{\mu}_j := \mu_j$ si $j \neq i$ entonces $\{\mu_I^* \mid I \in \mathbb{N}^n\}$ es base de $C_e(G)$ si y solamente si lo es $\{\bar{\mu}_I^* \mid I \in \mathbb{N}^n\}$. Para ello basta ver que $\{\bar{\mu}_I^* \mid |I| \leq n\}$ genera el mismo subespacio que $\{\mu_I^* \mid |I| \leq n\}$ para todo n. Esto es cierto, ya que, por hipótesis $\bar{\mu}_i := \alpha\mu_i + \sum_{j\neq i} \alpha_j \mu_j$ con $\alpha \neq 0$, lo que implica que $\mu_i = \frac{1}{\alpha}\bar{\mu}_i - \sum_{j\neq i} \frac{\alpha_j}{\alpha}\bar{\mu}_j$ y que por lo tanto, podemos expresar los monomios μ_I^* en términos de los $\bar{\mu}_I^*$ y viceversa.

Sea ahora $\{\mu_1, ..., \mu_n\}$ base arbitraria de T_eG. Existe un elemento $\mu_{\sigma(1)}$ tal que $\{\mu_{\sigma(1)}, \partial_2|_e, ..., \partial_n|_e\}$ es base de T_eG y por ello, $\{\partial_I^*|_e \mid I \in \mathbb{N}^n\}$ sí es base de $C_e(G)'$, los monomios formados a partir de esta base son base de $C_e(G)'$. Reiterando este proceso existe una permutación, σ de $\{1, .., n\}$ tal que $\{\mu_{\sigma(1)}, ..., \mu_{\sigma(m)}\}$ cumple lo mismo. Puesto que reordenar monomios no aumenta el grado, los monomios de grado $\leq |I|$ formados a partir de $\{\mu_{\sigma(1)}, ..., \mu_{\sigma(n)}\}$ generan el mismo subespacio que los formados a partir de $\{\mu_1, ..., \mu_n\}$. Por lo tanto $\{\mu_I^{*2} \mid |I| \leq n\}$ es base de $C_e(G)'$. $\square$

Lema 35. *La aplicación formal φ en la demostración del Teorema 33 es analítica en e.*

Demostración. Para probarlo vamos a necesitar el siguiente teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales:

> *Sea $\phi = (\phi_1, ..., \phi_n)$ una aplicación analítica en $e = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$. La ecuación diferencial formal $\gamma'(s) = \phi(\gamma(s))$, $\gamma(0) = e$ posee una única solución formal. Esta solución es analítica en 0.*

Vamos a probar el enunciado en un caso más general de lo necesario. Sea $G_1 := \mathbb{R}^m$ y $G_2 := \mathbb{R}^n$, con $\theta\colon T_eG_1 \longrightarrow T_eG_2$ un homomorfismo de álgebras de Lie, $\theta\colon C_e(G_1)' \longrightarrow C_e(G_2)'$ el correspondiente homomorfismo de álgebras de Hopf y $\varphi\colon G_1 \longrightarrow G_2$ la aplicación formal que cumple que $\varphi' = \theta$. Probaremos que φ es analítica. El resultado requerido en la demostración del Teorema 33 corresponde a $n = m$ y a θ isomorfismo.

Primer vamos a probarlo para para $G_1 = (\mathbb{R}, +)$. En este caso $\varphi(s+t) = m_2(\varphi(s), \varphi(t))$ y así

$$\begin{aligned}\varphi_k'(s) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_k(t+s) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} m_2(\varphi(s), \varphi(t))_k \\ &= \sum_{i=1}^{m} \partial_{y_i}|_{(\varphi(s),e)} m(x,y)_k \cdot \varphi_i'(0). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Usando el teorema de existencia y unicidad que hemos enunciado al comienzo de esta demostración a la aplicación ϕ determinada por las funciones analíticas en e

$$\phi_k(x) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i}|_{(x,0)} m(x,y)_k \cdot \varphi_i'(0)$$

que, por (2.1), tiene como solución formal a φ, concluimos que φ es analítica en 0.

Una vez probado esto, vamos a pasar al caso general. Puesto que el producto de un álgebra de Lie es anticonmutativo y el álgebra de Lie asociada al grupo $(\mathbb{R}, +)$ tiene dimensión 1 entonces el producto de esta álgebra de Lie es nulo. Así, dado $\mu \in T_eG_1$ –y lo mismo serviría para $\mu \in T_eG_2$– existe un homomorfismo de álgebras de Lie desde el álgebra de Lie de $(\mathbb{R}, +)$ hasta T_eG_1 que envía $\partial_1|_0 \longmapsto \mu$. Por lo que acabamos de ver, existe un entorno U_μ de 0 en $\mathbb{R}^n$ y una aplicación $f_\mu \colon U_\mu \subset \mathbb{R} \longrightarrow G_1$ analítica en U_μ tal que $f_\mu'(0) := df_\mu(\partial_1|_0) = \mu$ –recordemos que $df_\mu|_0$ coincide con el homomorfismo de álgebras de Lie– y de modo que $f_\mu(s+t) = m_1(f_\mu(s), f_\mu(t))$ si $s, t \in U_\mu$. Además

$$\begin{aligned} \varphi \circ f_\mu \colon \mathbb{R} &\longrightarrow G_2 \text{ es un homomorfismo formal} \\ f_{\theta(\mu)} \colon U_{\theta(\mu)} &\longrightarrow G_2 \text{ es un homomorfismo analítico} \end{aligned}$$

Puesto que $(\varphi \circ f_\mu)'(0) = d\varphi|_e \mu = \theta(\mu) = f_{\theta(\mu)}'(0)$, por (2.1) y por la unicidad del teorema, existe un entorno de 0 tal que $\varphi \circ f_\mu$ y $f_{\theta(\mu)}$ coinciden.

Seleccionamos ahora una base $\mu_1, ..., \mu_n$ de T_eG_1 y un entorno U de 0 suficientemente pequeño para que

$$\begin{array}{rccl} \phi\colon & U^m & \longrightarrow & G_1 \\ & (t_1, ..., t_m) & \longmapsto & f_{\mu_1}(t_1) \cdots f_{\mu_m}(t_m) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \bar{\phi}\colon & U^m & \longrightarrow & G_2 \\ & (t_1, ..., t_m) & \longmapsto & f_{\theta(\mu_1)}(t_1) \cdots f_{\theta(\mu_m)}(t_m) \end{array}$$

donde xy indica el producto correspondiente, estén definidas y sean analíticas. Por un lado, como $f_\mu(0) = e$,

$$d\phi(\partial_{t_i}|_0) = \partial_{t_i}|_0\phi = f'_{\mu_i}(0) = \mu_i$$

por lo que $d\phi|_{(0,\dots,0)}$ es biyectiva y ϕ es un difeomorfismo local en $(0,\dots,0)$. Por otro lado, formalmente

$$\begin{aligned}\varphi\circ\phi(t_1,...,t_m) &= \varphi(f_{\mu_1}(t_1)\cdots f_{\mu_m}(t_m))\\ &= \varphi(f_{\mu_1}(t_1))\cdots\varphi(f_{\mu_m}(t_m))\\ &= f_{\theta(\mu_1)}(t_1)\cdots f_{\theta(\mu_m)}(t_m) = \bar\phi(t_1,...,t_m)\end{aligned}$$

implica que $\varphi\circ\phi = \bar\phi$, y por ello φ y $\bar\phi\circ\phi^{-1}$ coinciden en un entorno de e. Puesto que la segunda aplicación es analítica en e, también así la primera. $\square$

2.4. Ejemplos

En esta sección calcularemos en algunos ejemplos concretos el álgebra de Lie asociada a ciertos productos analíticos. Lo haremos a través del álgebra de Hopf, no tanto porque sea más simple, que en algunos casos no lo es, sino para mostrar cómo hacerlo ya que es un método general que solamente requiere algo de paciencia.

Ejemplo. El álgebra de cuaternios $\mathbb{H}$ es un álgebra asociativa de dimensión 4 sobre los números reales. Tienen una base ortonormada $1, i, j, k$ con la siguiente tabla de multiplicación

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Este producto se comporta muy bien con respecto a la norma ya que $\|uv\| = \|u\|\|v\|$ para cualesquiera $u, v \in \mathbb{H}$. En particular, los cuaternios de norma 1 forman una superficie esférica S^3 de dimensión 3 que es un conjunto cerrado por producto de $\mathbb{H}$. Por tanto, este producto unitario asociativo y analítico define un álgebra de Hopf y un álgebra de Lie asociada cuya tabla de multiplicación vamos a calcular.

Podemos darles coordenadas a dos puntos genéricos de un entorno de 1 mediante

$$(x_1,x_2,x_3) := a\cdot 1 + x_1\cdot i + x_2\cdot j + x_3\cdot k \quad \text{con} \quad a := \sqrt{1-x_1^2-x_2^2-x_3^2}$$

$$(y_1,y_2,y_3) := b\cdot 1 + y_1\cdot i + y_2\cdot j + y_3\cdot k \quad \text{con} \quad b := \sqrt{1-y_1^2-y_2^2-y_3^2}$$

Así

$$\begin{aligned}
m((x_1,x_2,x_3),&(y_1,y_2,y_3)) = \\
&ab + ay_1\cdot i + ay_2\cdot j + ay_3\cdot k + x_1 b\cdot i \\
&\quad - x_1y_1 + x_1y_2\cdot k - x_1y_3\cdot j + x_2b\cdot j - x_2y_1\cdot k \\
&\quad\quad - x_2y_2 + x_2y_3\cdot i + x_3b\cdot k + x_3y_1\cdot j - x_3y_2\cdot i - x_3y_3
\end{aligned}$$

Por lo tanto, representamos $m(x,y)$ como

$$m(x,y) = (ay_1+x_1b+x_2y_3-x_3y_2, ay_2-x_1y_3+x_2b+x_3y_1, ay_3+x_1y_2-x_2y_1+x_3b)$$

Pasamos ya a calcular $\partial_i|_1 * \partial_j|_1$ con $i \neq j$, teniendo en cuanta que $1 \in S^3$ tiene coordenadas $(0,0,0)$, por lo que identificaremos estos elementos. Así pues

$$\begin{aligned}
\partial_i|_1 \otimes \partial_j|_1(f\circ m) = \partial_i|_{x=1}\ \partial_j|_{y=1}(f\circ m) &= \partial_i|_{x=1}\left(\sum_{k=1}^{3}(\partial_k f)\cdot \partial_j|_{y=1}m_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{3}\big(\partial_i\partial_k|_1(f)\cdot\partial_j|_{y=1}m_k(1,y) + (\partial_k|_1 f)\cdot \partial_i|_{x=1}\partial_j|_{y=1}m_k\big) \\
&\underset{m_k(1,y)=y_k}{=} \partial_i\partial_j|_1(f) + \sum_{k=1}^{3}(\partial_k|_1 f)\cdot \partial_i|_{x=1}\partial_j|_{y=1}m_k
\end{aligned}$$

Tenemos que calcular el escalar $\partial_i|_{x=1}\partial_j|_{y=1}m_k$, el cual denotaremos como ϵ_{ijk}. Para ello separaremos en dos casos. Si los subíndices i,j,k son distintos entre sí

$$\epsilon_{ijk} = \partial_i|_{x=1}\ \partial_j|_{y=1}m_k = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad (i,j,k)\in\{(1,2,3),(2,3,1),(3,2,1)\} \\ \\ -1 \quad \text{si} \quad (i,j,k)\in\{(2,1,3),(3,2,1),(1,3,2)\}\end{cases}$$

Si $k\in\{i,j\}$, suponemos que $i=k$ (si $k=j$ es equivalente) así

$$\partial_i|_{x=1}\ \partial_j|_{y=1}m_k = \partial_k|_{x=1}\ \partial_j|_{y=1}m_k = \partial_k|_{x=1}(\pm x_l) \underset{l\neq j,k}{=} 0$$

entonces $\epsilon_{ijk}=0$. Una vez calculados todos los ϵ_{ijk} tenemos que

$$\begin{aligned}\partial_i\partial_j|_1(f)+\sum_{k=1}^{3}(\partial_k|_1 f)\cdot\partial_i|_{x=1}\partial_j|_{y=1}m_k &= \partial_i\partial_j|_1(f)+\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}(\partial_k|_1 f)\\ &= \partial_i\partial_j|_1(f)+\epsilon_{ijk}\partial_k|_1(f)\quad \text{con } k\neq i,j\end{aligned}$$

ya que si $k=j$ o $k=i$ entonces $\epsilon_{ijk}=0$. Una vez calculado esto, obtenemos

$$\partial_i|_1 * \partial_j|_1 - \partial_j * |_1\partial_i|_1 = 2\epsilon_{ijk}\partial_k|_1 \quad \text{con } k\neq i,j$$

Quedando la tabla de multiplicación del álgebra de Lie que buscábamos como

$[\ ,\ ]$	$\partial_1\|_1$	$\partial_2\|_1$	$\partial_3\|_1$
$\partial_1\|_1$	0	$2\partial_3\|_1$	$-2\partial_2\|_1$
$\partial_2\|_1$	$-2\partial_3\|_1$	0	$2\partial_1\|_1$
$\partial_3\|_1$	$2\partial_2\|_1$	$-2\partial_1\|_1$	0

Otra forma de calcular la tabla hubiese sido utilizar la nota del final de la Sección 2.1 que permite el cálculo directo a partir de la fórmula del producto unitario. $\square$

Ejemplo. Asumimos la siguiente igualdad para matrices cuadradas $A\in M_n(\mathbb{R})$

$$\det(\exp(A)) = e^{\text{traza}(A)}.$$

Así pues, alrededor de la matriz identidad Id_n el grupo de matrices de determinante 1 se puede parametrizar por las matrices de traza 0. Para $n=2$, alrededor de Id_2 tenemos que las matrices de determinante 1 son de la forma

$$\exp(\begin{pmatrix} x_1 & x_2\\ x_3 & -x_1\end{pmatrix}).$$

Vamos a calcular la tabla de multiplicación del álgebra de Lie asociada a este producto unitario asociativo y analítico.

Usaremos las siguientes coordenadas

$$\exp(\begin{pmatrix} x_1 & x_2\\ x_3 & -x_1\end{pmatrix}) \equiv (x_1,x_2,x_3), \qquad \exp(\begin{pmatrix} y_1 & y_2\\ y_3 & -y_1\end{pmatrix}) \equiv (y_1,y_2,y_3)$$

y $1:=(0,0,0)$. Usando las series de Taylor

$$\exp(\begin{pmatrix} x_1 & x_2\\ x_3 & -x_1\end{pmatrix}) = \mathrm{Id}+\begin{pmatrix} x_1 & x_2\\ x_3 & -x_1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & x_2\\ x_3 & -x_1\end{pmatrix}^2+\cdots$$

tenemos que como solo buscamos calcular las derivadas de primer orden, los elementos que sean de grado mayor que uno, al evaluarlos posteriormente serán 0, por lo tanto, podemos utilizar

$$\exp(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -x_1 \end{pmatrix}) \sim \mathrm{Id} + \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -x_1 \end{pmatrix}.$$

Una vez que tenemos esto, ya podemos calcular con facilidad el producto que necesitamos para nuestras operaciones, así

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) &= (\mathrm{Id} + \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -x_1 \end{pmatrix}) \cdot (\mathrm{Id} + \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & -y_1 \end{pmatrix}) \\
&= \mathrm{Id} + \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & -y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & -y_1 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Id} + \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + x_1 y_1 + x_2 y_3 & x_2 + y_2 + x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ x_3 + y_3 - x_3 y_1 - y_3 x_1 & -x_1 - y_1 + x_3 y_2 + x_1 y_1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que para nuestros cálculos podemos utilizar el producto

$$m(x, y) = (x_1 + y_1 + x_1 y_1 + x_2 y_3, x_2 + y_2 + x_1 y_2 - x_2 y_1, x_3 + y_3 - x_3 y_1 - y_3 x_1)$$

En este caso vamos a calcular directamente todos los $\partial_i|_1 * \partial_j|_1$ con $i, j \in \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned}
\partial_1|_1 \otimes \partial_2|_1 (f \circ m) &= \partial_1|_{x=1} (\partial_2|_{y=1} (f(m(x, y))) \\
&= \partial_1|_{x=1} (\partial_2 f \cdot (1 + x_1)) = \partial_1 \partial_2|_1 f + \partial_2|_1 f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_2|_1 \otimes \partial_1|_1 (f \circ m) &= \partial_2|_{x=1} (\partial_1|_{y=1} (f(m(x, y))) \\
&= \partial_2|_{x=1} (\partial_1 f \cdot (1 + x_1) + \partial_2 f \cdot (-x_2) + \partial_3 f \cdot x_3) \\
&= \partial_2 \partial_1|_1 f - \partial_2|_1 f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_1|_1 \otimes \partial_3|_1 (f \circ m) &= \partial_1|_{x=1} (\partial_3|_{y=1} (f(m(x, y))) \\
&= \partial_1|_{x=1} (\partial_2 f(x_2) + \partial_3 f \cdot (1 - x_1)) \\
&= \partial_1 \partial_3|_1 f - \partial_3|_1 f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_3|_1 \otimes \partial_1|_1 (f \circ m) &= \partial_3|_{x=1} (\partial_1|_{y=1} (f(m(x, y))) \\
&= \partial_3|_{x=1} (\partial_1 f \cdot (1 + x_1) + \partial_2 f \cdot (-x_2) + \partial_3 f \cdot (x_3)) \\
&= \partial_3 \partial_1|_1 f + \partial_3|_1 f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_2|_1 \otimes \partial_3|_1(f\circ m) &= \partial_2|_{x=1}(\partial_3|_{y=1}(f(m(x,y)))\\ &= \partial_2|_{x=1}(\partial_1 f\cdot(x_2)+\partial_3 f\cdot(1-x_1))\\ &= \partial_2\partial_3|_1 f+\partial_1|_1 f\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_3|_1 \otimes \partial_2|_1(f\circ m) &= \partial_3|_{x=1}(\partial_2|_{y=1}(f(m(x,y)))\\ &= \partial_3|_{x=1}(\partial_2 f\cdot(1+x_1)) = \partial_3\partial_2|_1 f\end{aligned}$$

De este modo, la tabla de multiplicación del álgebra de Lie que buscábamos es la siguiente:

$[\ ,\ ]$	$\partial_1\|_1$	$\partial_2\|_1$	$\partial_3\|_1$
$\partial_1\|_1$	0	$2\partial_2\|_1$	$-2\partial_3\|_1$
$\partial_2\|_1$	$-2\partial_3\|_1$	0	$\partial_1\|_1$
$\partial_3\|_1$	$2\partial_3\|_1$	$-\partial_1\|_1$	0

Nuevamente esta no es la forma más breve de calcular la tabla de multiplicación, pero sí encaja muy bien con la teoría vista hasta ahora y con la idea de manipular los productos de Lie a través del álgebra de Hopf y en términos de bases. Otra forma sería la siguiente. Primero observamos que si $\{X_i\}_i$ es una base fija de las matrices de traza cero y $x_i(A)$ es la i-ésima coordenada de la matriz A respecto de esta base entonces, usando que alrededor de la matriz identidad Id las matrices son de la forma $\exp(A)$ y la nota que cierra la Sección 2.1,

$$\begin{aligned}\partial_i|_{\mathrm{Id}} \otimes \partial_j|_{\mathrm{Id}}(xyx^{-1}y^{-1}) &= \frac{d}{dt}\bigg|_0 \frac{d}{ds}\bigg|_0 \exp(tX_i)\exp(sX_j)\exp(-tX_i)\exp(-sXj)\\ &= X_iX_j - X_iX_j - X_jX_i + X_iX_j = [X_i, X_j]\end{aligned}$$

Por tanto las constantes que aparecen en el producto $[\partial_i|_{\mathrm{Id}}, \partial_j|_{\mathrm{Id}}] = \sum_k \alpha_{ij}^k \partial_k|_{\mathrm{Id}}$ son las mismas que nos encontramos al expresar $[X_i, X_j]$ como combinación lineal de la base $\{X_i\}_i$, es decir, que el álgebra de Lie del grupo de matrices invertibles es isomorfa al álgebra de matrices con el producto conmutador. En el caso del grupo de matrices de determinante 1, este isomorfismo sería con el álgebra de Lie de matrices de traza 0 con el producto conmutador. □

Si nos fijamos en las dos álgebras de Lie que acabamos de calcular en los ejemplos anteriores, podemos ver que no son isomorfas entre sí, vistas como álgebras sobre los números reales –en la primera álgebra no hay elementos a, b no nulos tales que $[a, b] = 2b$, mientras que en la segunda sí. Podemos así de esta forma clasificar productos unitarios asociativos analíticos muy distintos entre sí calculando sus álgebras de Lie y ver si dichas álgebras son isomorfas entre sí o no.

Capítulo 3

Álgebras de Hopf no asociativas

La exposición que hemos seguido de productos unitarios analíticos no requiere que el producto sea asociativo. Es decir, esta técnica ayuda a clasificar productos unitarios mucho más generales que los asociativos a través de análogos no asociativos de las álgebras de Hopf asociativas que se han usado en el caso de productos asociativos. En este capítulo desarrollaremos, debido a la limitación del espacio, el estudio de una familia de productos unitarios que generalizan a uno muy natural en las matrices simétricas definidas positivas. Nos hemos basado en [2, 3, 4].

3.1. Matrices simétricas definidas positivas

Consideramos el conjunto de matrices reales $n \times n$ simétricas y definidas positivas, P_n. Este conjunto no es cerrado por el producto usual de matrices, por lo que parece no tener interés dentro del contexto que estamos exponiendo. Sin embargo, vamos a ver que podemos definir de modo natural un producto unitario analítico no asociativo en P_n, por lo que a partir de P_n es una biálgebra no asociativa de modo similar a como se obtienen las álgebras de Lie a partir de productos asociativos.

Dada $A \in P_n$ existe una matriz P ortogonal tal que

$$PAP^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \text{con} \quad \lambda_1, ..., \lambda_n > 0$$

Así pues, si

$$D := \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$$

entonces $A = P^{-1}D^2P = (P^{-1}DP)^2$. Además $P^{-1}DP \in P_n$ ya que $P^{-1}DP = P^TDP$ que es simétrica y tiene valores propios > 0, por lo tanto $P^{-1}DP$ es una raíz cuadrada de A en P_n.

Lema 36. *Dada $A \in P_n$, existe una única $\sqrt{A} \in P_n$ tal que $\sqrt{A}^2 = A$.*

Demostración. Hemos probado la existencia, por lo que solo resta probar la unicidad. Si existiera otra $R \in P_n$ tal que $R^2 = A$ además de la matriz $\sqrt{A} := P^{-1}DP$ encontrada en el párrafo previo al lema, entonces

$$R^2 = A = P^{-1}D^2P \Longrightarrow PR^2P^{-1} = D^2 \Longrightarrow (PRP^{-1})^2 = D^2.$$

Esto implica que D^2 conmuta con PRP^{-1} y como $\lambda_1, ..., \lambda > 0$ entonces D –y también $\sqrt{D}$– conmuta con PRP^{-1} ya que es una potencia suya. Lo cual nos lleva a que:

1. como se cumple que $D^{-1}PRP^{-1}D^{-1}PRP^{-1} = D^{-2}(PRP^{-1})^2 = \mathrm{Id}$ entonces $(D^{-1}PRP^{-1})^2 = \mathrm{Id}$;
2. tenemos que $(D^{-1}PRP^{-1})^T = (PRP^T)D^{-1} = D^{-1}(PRP^T)$ lo que implica que $D^{-1}PRP^{-1}$ es simétrica, y
3. si X es un vector columna, como $\sqrt{D}$ conmuta con PRP^{-1}, P es ortogonal y R es definida positiva,

$$X^T(D^{-1}PRP^{-1})X = (X^T\sqrt{D}^{-1}P)R(P^T\sqrt{D}^{-1}X) \geq 0$$

   y $X^T(D^{-1}PRP^{-1})X = 0 \Longleftrightarrow X = 0$.

Por lo tanto $D^{-1}PRP^{-1}$ es simétrica definida y sus valores propios son reales positivos. Pero como a su vez se cumple que $(D^{-1}PRP^{-1})^2 = \mathrm{Id}$ entonces todos ellos tienen que ser 1. Además, como $D^{-1}PRP^{-1}$ es diagonalizable, entonces necesariamente $D^{-1}PRP^{-1} = \mathrm{Id}$, es decir $PRP^{-1} = D$, lo que implica que $R = P^{-1}DP = \sqrt{A}$. □

Proposición 37. *Consideremos en P_n el producto $A * B := \sqrt{A}B\sqrt{A}$ y la aplicación $S(A) := A^{-1}$. Se tiene:*

1. $A * B \in P_n$, $A * \mathrm{Id} = A = \mathrm{Id} * A$.
2. $A * (B * (A * C)) = (A * (B * A)) * C$.
3. $S(A) * (A * X) = X = A * (S(A) * X)$.
4. $S(A)((A * (X * A)) * S(A) = (S(A) * ((A * X) * S(A)) * A$.
5. $S(A * B) = S(A) * S(B)$.

Demostración. El primer apartado es obvio.

2. $(\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{A})^2 = \sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{A}\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{A} = \sqrt{A}\sqrt{B}A\sqrt{B}\sqrt{A} = A * (B * A)$ implica

$$\begin{aligned} A * (B * (A * C)) &= \sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{A}C\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{A} \\ &= \sqrt{(A * (B * A))}C\sqrt{(A * (B * A))} = (A * (B * A)) * C \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} A^{-1} * (A * X) &= \sqrt{A^{-1}}\sqrt{A}X\sqrt{A}\sqrt{A^{-1}} = X \\ &= \sqrt{A}\sqrt{A^{-1}}X\sqrt{A^{-1}}\sqrt{A} = A * (A^{-1} * X) \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} A^{-1} * ((A * (X * A)) * A^{-1}) &\underset{por\ 2.}{=} A^{-1} * (A * (X * (A * A^{-1}))) \\ &= A^{-1} * (A * X) = A^{-1} * ((A * X) * (A^{-1} * A)) \\ &\underset{por\ 2.}{=} (A^{-1} * ((A * X) * A^{-1})) * A \end{aligned}$$

5. $S(A) * S(B) = A^{-1} * B^{-1} = \sqrt{A^{-1}}B^{-1}\sqrt{A^{-1}} = (\sqrt{A}B\sqrt{A})^{-1} = S(A * B)$

□

Proposición 38. *Si X es una matriz simétrica entonces* $\exp(X) \in P_n$*, es decir,* $\exp(X)$ *es una matriz simétrica y definida positiva.*

Este resultado admite un recíproco.

Proposición 39. *Sea $A \in P_n$ y P matriz ortogonal tal que*

$$PAP^T = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \quad con \quad \lambda_1, ..., \lambda_n > 0.$$

Se tiene que

$$\ln(A) := P^T \operatorname{diag}(\ln(\lambda_1), \ldots, \ln(\lambda_n))P$$

es una matriz simétrica pero no necesariamente definida positiva y $\exp(\ln(A)) = A$*. Además, si X es una matriz simétrica entonces* $\ln(\exp(X)) = X$*.*

Demostración. Puesto que $\exp(x) := \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}x^k$ para matrices en $M_n(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned} \exp(\ln(A)) &= \sum_{k\geq 0} P^T \operatorname{diag}\left(\frac{\ln(\lambda_1)^k}{k!}, \ldots, \frac{\ln(\lambda_n)^k}{k!}\right) P \\ &= P^T \operatorname{diag}\left(e^{\ln(\lambda_1)}, \ldots, e^{\ln(\lambda_n)}\right) P \\ &= P^T \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P = A. \end{aligned}$$

Si X es simétrica entonces existe P matriz ortogonal tal que $PXP^T = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Por tanto $P \exp(X) P^{-1} = \operatorname{diag}(e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n})$ y así, por la definición de ln, y la nota tras la demostración, $\ln(\exp(X)) = X$. $\square$

Nota. Observemos que $\ln(A)$ no depende de la matriz P ya que si Q es otra matriz ortogonal y $QAQ^{-1} = PAP^{-1}$ es la misma matriz diagonal $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ entonces $P^{-1}DP = Q^{-1}DQ$ por lo que PQ^{-1} conmuta con D y por tanto también con la matriz $\operatorname{diag}(\ln(\lambda_1), \ldots, \ln(\lambda_n))$. Así,

$$P^T \operatorname{diag}(\ln(\lambda_1), \ldots, \ln(\lambda_n)) P = Q^T \operatorname{diag}(\ln(\lambda_1), \ldots, \ln(\lambda_n)) Q$$

$\square$

Puesto que exp es una aplicación biyectiva entre las matrices simétricas y las matrices simétrica definidas positivas, podemos usar las primeras para coordinatizar las segundas y transportar el producto $*$.

Por la unicidad de $\sqrt{A}$ tenemos que

$$\sqrt{A} = \exp\left(\frac{1}{2}\ln(A)\right),$$

así que en estas coordenadas el producto en P_n se transportaría a

$$\ln\left(\exp(X) * \exp(Y)\right) = \ln\left(\exp\left(\frac{1}{2}X\right)\exp(Y)\exp\left(\frac{1}{2}X\right)\right)$$

que es analítica alrededor de 0 ya que exp lo es y ln también lo es alrededor de Id por ser su inversa.

Recordemos que $T_e\, P_n = \{\mu \in C_e(P_n)' \mid \Delta(\mu) = \mu \otimes \delta + \delta \otimes \mu\}$ donde $e := \mathrm{Id}$. Aunque en el caso de productos asociativos el conmutador $[\ ,\ ]$ contenía toda la información para recuperar localmente el producto unitario, aquí el conmutador no contiene absolutamente nada de información.

Proposición 40. *Para cualesquiera $\alpha, \beta \in T_e\, P_n$ se tiene que $[\alpha, \beta] = 0$.*

Demostración. Linealizando la identidad del apartado 3 de la Proposición 37, $\sum S(\alpha_{(1)}) * (\alpha_{(2)} * \beta) = \epsilon(\alpha)\beta$, por lo que $S(\delta_e) = \delta_e$ y $S(\alpha) + \alpha = 0$ si $\alpha \in T_e\, P_n$. Si $\alpha, \beta \in T_e\, P_n$ entonces la misma identidad nos muestra que

$$S(\alpha * \beta) + S(\alpha) * \beta + \beta * S(\alpha) + \alpha * \beta = 0$$

es decir, $S(\alpha * \beta) = \beta * \alpha$; pero por otro lado tenemos que linealizando la identidad del apartado 5 de la Proposición 37,

$$S(\alpha * \beta) = S(\alpha) * S(\beta) \Longrightarrow S(\alpha * \beta) = \alpha * \beta.$$

Por lo tanto $\alpha * \beta = \beta * \alpha$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in T_e\, P_n$. $\square$

3.2. Álgebras de Hopf no asociativas

Un lazo local es un par (P, m) formado por una variedad diferenciable punteada –es decir, en la que hemos fijado un punto base e– y un producto $m\colon U \times U \longrightarrow \mathrm{P}$, $(x, y) \longmapsto xy := m(x, y)$ definido en un entorno U de e que es analítico y $ex = x = xe$. En general, al estudiar lazos locales el entorno U de definición de m no es relevante por lo que podemos asumir que es tan pequeño como sea necesario para que todas las expresiones algebraicas que usemos tengan sentido. Por ejemplo, si necesitásemos multiplicar tres elementos x, y, z, puesto que m es continúa y $m(e, e) = e$, $m^{-1}(U)$ sería un entorno de (e, e) y existiría U_1 entorno de e, que podemos asumir contenido en U, tal que $U_1 \times U_1 \subseteq m^{-1}(U)$. Así, dados $x, y, z \in U_1$, el producto xy está definido y pertenece a U y por tanto el producto $(xy)z$ está definido también, lo mismo que el producto $x(yz)$. Es decir, el producto de tres elementos de U_1 está definido. Del mismo modo procederíamos para encontrar un entorno en el cual podamos realizar operaciones con mayor número de factores.

Puesto que el Teorema 20 acerca de existencia de inversos depende fuertemente de la asociatividad, es conveniente reformularlo en un contexto no asociativo para poder dar una definición correcta de álgebra de Hopf no asociativa.

Teorema 41. *Sea* P *un lazo local. Existe un entorno* U *de* e *y aplicaciones* $\backslash, /\colon U \times U \longrightarrow \mathrm{P}$ *tales que*

$$x\backslash(xy) = y = x(x\backslash y) \quad e \quad (yx)/x = y = (y/x)x$$

si x, y *pertenecen a* U.

Demostración. Podemos pensar sin pérdida de generalidad que $\mathrm{P} = \mathbb{R}^m$ y que $e = (0, \ldots, 0)$. Consideramos la aplicación $F((x, y), z) := xz - y$. Claramente $F((e, e), z) = z$, por lo que el jacobiano de esta aplicación en (e, e) no es nulo. Por tanto, por el Teorema de la función implícita, existe un entorno abierto $U \times U$ de (e, e) y una única aplicación analítica $\varphi\colon U \times U \longrightarrow \mathrm{P}$ de modo que $F((x, y), \varphi(x, y)) = F((e, e), e) = (0, \ldots, 0)$. Es decir, $x\varphi(x, y) - y = (0, \ldots, 0)$. Definiendo $x\backslash y := \varphi(x, y)$ se tiene $x(x\backslash y) = y$. Por el mismo motivo, a partir de $F_1((x, y), z) := x\backslash z - y$ encontramos una única aplicación analítica $\varphi_1(x, y)$ tal que $x\backslash\varphi_1(x, y) = y$ en U –recordar que U puede ser tan pequeño como sea necesario. Multiplicando esta expresión por x y usando que $x(x\backslash y) = y$ obtenemos que $\varphi_1(x, y) = xy$. Por tanto $x\backslash(xy) = y$.

A partir de la aplicación $G((x,y),z) := zx - y$ obtendríamos la aplicación x/y y sus propiedades. $\square$

Las aplicaciones $\backslash$ y $/$ se conocen como divisiones a izquierda y a derecha, y sus sustitutos naturales de la aplicación $x \longmapsto x^{-1}$ cuando no se dispone de la asociatividad.

Definición 42. *Un álgebra de Hopf no asociativa (coconmutativa y coasociativa) es una biálgebra* $(B, m, u, \Delta, \epsilon)$ *junto con dos aplicaciones lineales* $\backslash, / \colon B \otimes B \longrightarrow B$ *tales que*

$$\sum \mu_{(1)} \backslash (\mu_{(2)} \nu) = \epsilon(\mu)\nu = \sum \mu_{(1)} (\mu_{(2)} \backslash \nu)$$
$$\sum (\nu \mu_{(1)}) / \mu_{(2)} = \epsilon(\mu)\nu = \sum (\nu / \mu_{(1)}) \mu_{(2)}.$$

Claramente, la biálgebra de distribuciones con soporte en e de un lazo local P es un álgebra de Hopf no asociativa.

3.3. Teoría de Lie para lazos locales de Bruck

Los lazos locales de Bruck son tipos especiales de lazos locales. Un lazo local de Bruck (a izquierda) es un lazo local tal que cumple además las siguientes identidades:

$$x(y(xz)) = (x(yx))z \quad y \quad S(xy) = S(x)S(y)$$

donde $S(x) := e/x$ para cualesquiera x, y, z en un entorno suficientemente pequeño de e como para que las expresiones estén definidas –ya no volveremos a insistir en este punto. Tras lo expuesto en la sección anterior, el ejemplo más natural de lazo local de Bruck es el conjunto de las matrices simétricas definidas positivas P_n con el producto $*$.

Algunas de las propiedades de P_n que no se recogen en la definición de lazo local de Bruck son en realidad consecuencia de la definición.

Lema 43. *En cualquier lazo local de Bruck se tiene que* $S(x)(xy) = y = x(S(x)y)$.

Demostración. Sustituyendo $y = S(x)$ en la primera identidad de la definición de lazo de Bruck tenemos que $x(S(x)(xz)) = (x(S(x)x))z$. Puesto que $S(x)x = (e/x)x = e$ entonces $x(S(x)(xz)) = xz$. Dividiendo a izquierda por

x tenemos que $S(x)(xz) = z$. En particular $S(x)(xS(x)) = S(x)$, lo que, dividiendo por $S(x)$ a izquierda implica que $xS(x) = e$. Como además, por la definición de S, $S(S(x))S(x) = e$ entonces $xS(x) = e = S(S(x))S(x)$. Dividiendo a derecha por $S(x)$ obtenemos $S(S(x)) = x$. Si partimos de $S(x)(xz) = z$ cambiando x por $S(x)$ entonces $S(S(x))(S(x)z) = z$ implica que $x(S(x)z) = z$, que es la segunda igualdad que queríamos demostrar. □

Así, la demostración de la Proposición 40 nos muestra que para cualquier lazo de Bruck P el conmutador de elementos de $T_e\,\mathrm{P}$ es siempre nulo por lo que no podemos clasificar ni estudiar P utilizando un análogo del álgebra de Lie como hemos hecho hasta ahora. Debemos buscar una nueva forma de analizarlo.

Definición 44 (Asociador)**.** *En un álgebra se llama asociador de x, y, z al elemento $(x, y, z) := (xy)z - x(yz)$.*

Lema 45. *Sea* P *un lazo local de Bruck. Dados $\alpha, \beta, \gamma \in T_e\,\mathrm{P}$ se tiene que el asociador $(\alpha * \beta) * \gamma - \alpha * (\beta * \gamma)$ de α, β, γ en $C_e(\mathrm{P})'$ pertenece nuevamente a $T_e\,\mathrm{P}$.*

Demostración. Basta usar que $T_e\,\mathrm{P} = \{\mu \in C_e(\mathrm{P})' \mid \Delta(\mu) = \mu\otimes\delta + \delta\otimes\mu\}$. □

Así, quizás sea el producto triple asociador (α, β, γ) en lugar del producto binario conmutador $[\alpha, \beta]$ el que resulte más útil para clasificar el lazo P. Vamos a estudiar propiedades de dicho asociador y a ver como este nos permite comprender todo el producto de $C_e(\mathrm{P})'$, pero de aquí en adelante, para aligerar la notación y puesto que ya nos centraremos en $C_e(\mathrm{P})'$ en lugar de en P, vamos a utilizar

- 1 en lugar de δ
- $x, y, z, ...$ en lugar de $\eta, \mu, \nu, ... \in C_e(\mathrm{P})'$
- xy en lugar de $x * y$
- $a, b, c, ...$ en lugar de $\alpha, \beta, ... \in T_e\,\mathrm{P}$

Proposición 46. *Dados $a \in T_e\,\mathrm{P}$ e $y, z \in C_e(\mathrm{P})'$ se tiene que:*

1. $(a, y, z) = -(y, a, z)$,
2. $a(yz) = (ay + ya)z - y(az)$.

Demostración. Linealizando las identidades que definen a los lazos de Bruck tenemos que $\sum x_{(1)}(y(x_{(2)}z)) = \sum(x_{(1)}(yx_{(2)}))z$. Si elegimos a como x, puesto que $\Delta(a) = a\otimes 1+1\otimes a$ entonces $a(yz)+y(az) = (ay)z+(ya)z$. Esto prueba ambos apartados. $\square$

Si usamos la notación

$$L_a\colon x \longmapsto ax, \quad R_a\colon x \longmapsto xa \quad \text{y} \quad T_a\colon x \longmapsto ax + xa$$

entonces la segunda propiedad se puede escribir como

$$L_a(yz) = T_a(y)z + y(-L_a(z)). \tag{3.1}$$

Definición 47. *Se llama conjunto de derivaciones ternarias de* $C_e(\mathrm{P})'$ *al conjunto*

$$\mathrm{TDer}(C_e(\mathrm{P})') := \{(d_1, d_2, d_3) \in \mathrm{End}(C_e(\mathrm{P})')^3 \mid d_1(yz) = d_2(y)z + yd_3(z)\}.$$

Si en una derivación ternaria se tiene que $d_1 = d_2 = d_3$ *entonces decimos que* d_1 *es una derivación.*

En la definición el conjunto $\mathrm{End}(C_e(\mathrm{P})')$ es el conjunto de aplicaciones lineales de $C_e(\mathrm{P})'$ en sí mismo. Estas aplicaciones lineales se pueden componer entre sí pero también podemos considerar el producto conmutador entre ellas. Al igual que en la demostración de la Proposición 29, con este conmutador $\mathrm{End}(C_e(\mathrm{P})')$ es un álgebra de Lie, lo mismo que $\mathrm{End}(C_e(\mathrm{P})')^3$ si utilizamos el producto conmutador componente a componente.

Proposición 48. *Dadas* (d_1, d_2, d_3) *y* $(d_1', d_2', d_3') \in \mathrm{TDer}(C_e(\mathrm{P})')$ *entonces también* $([d_1, d_1'], [d_2, d_2'], [d_3, d_3']) \in \mathrm{TDer}(C_e(\mathrm{P})')$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
[d_1, d_1'](yz) &= d_1(d_1'(yz)) - d_1'(d_1(yz)) \\
&= d_1(d_2'(y)z + yd_3'(z)) - d_1'(d_2(y)z + yd_3(z)) \\
&= d_2d_2'(y)z + d_2'(y)d_3(z) + d_2(y)d_3'(z) + yd_3d_3'(z) \\
&- d_2'd_2(y)z - d_2(y)d_3'(z) - d_2'(y)d_3(z) - yd_3'd_3(z) \\
&= [d_2, d_2'](y)z + y[d_3, d_3](z).
\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 49. *Sea* P *un lazo local de Bruck. Si* $a, b \in T_e\,\mathrm{P}$ *entonces*

$$([L_a, L_b], [T_a, T_b], [L_a, L_b]) \in \mathrm{TDer}(C_e(\mathrm{P})').$$

Más aún, $[L_a, L_b] = [T_a, T_b]$ es una derivación de $C_e(\mathrm{P})'$.

Demostración. La primera cuestión es cierta por las propiedades que tiene el asociador, como hemos visto en (3.1). Ahora, dados $a, b \in T_e\,\mathrm{P}$ tenemos que

$$[L_a, L_b](1) = ab - ba = 0 \text{ ya que } \; ab = ba \text{ si } a, b \in T_e\,\mathrm{P}\,.$$

Así pues,

$$[L_a, L_b](yz) = [T_a, T_b](y)z + y[L_a, L_b](z) \underset{z=1}{\Longrightarrow} [L_a, L_b](y) = [T_a, T_b](y)$$

de donde concluimos que $[L_a, L_b] = [T_a, T_b]$ y que por lo tanto $[L_a, L_b]$ es una derivación. $\square$

Proposición 50. *Sea* P *un lazo local de Bruck,* $a, b \in T_e\,\mathrm{P}$ *y*

$$D_{a,b}(y) := [a, b, y] := [L_a, L_b](y).$$

Se tiene que $[[L_a, L_b], L_c] = L_{[a,b,c]}$

Demostración. Como $D_{a,b} = [L_a, L_b]$ es una derivación, $D_{a,b}(xy) = D_{a,b}(x)y + xD_{a,b}(y)$, lo que podemos reescribir como $[D_{a,b}, L_x] = L_{D_{a,b}(x)}$. $\square$

Proposición 51. *Sea* P *un lazo local de Bruck y* $a, b, c \in T_e\,\mathrm{P}$*. Se tiene que* $[a, b, c] = -2(a, b, c) \in T_e\,\mathrm{P}$.

Demostración. La igualdad se prueba de forma inmediata pues

$$\begin{aligned}[a, b, c] = [L_a, L_b](c) &= a(bc) - b(ac) = -(a, b, c) + (b, a, c) + (ab)c - (ba)c \\ &= -2(a, b, c),\end{aligned}$$

a aplicando el Lema 45 concluimos que este elemento pertenece a $T_e\,\mathrm{P}$. $\square$

Podemos así considerar el par $(T_e\,\mathrm{P}, [\ ,\ ,\ ])$ y pensar en él como en una estructura algebraica. Ahora tenemos que ver como este producto triple nos permite estudiar $C_e(\mathrm{P})'$.

El siguiente resultado es análogo al Lema 34, y omitimos la demostración.

Proposición 52. *Sea* P *un lazo local de Bruck. Si* $\{a_1, ..., a_n\}$ *es una base de* $T_e\,\mathrm{P}$ *y*

$$a_I := \underbrace{a_1(\cdots(a_1}_{i_1}\, a_2 \cdots \overbrace{a_n(\cdots(a_n a_n))}^{i_n}\cdots)$$

con $I := (i_1, ..., i_n)$ *entonces*

$$\{a_I \mid I \in \mathbb{N}^n\}$$

es una base (de tipo Poincaré-Birkhoff-Witt) de $C_e(\mathrm{P})'$

Queremos calcular dentro de $C_e(\mathrm{P})'$ el producto $a_I a_J$ de dos elementos básicos en términos de la base que acabamos de nombrar usando si fuera necesario algún tipo de penalización, es decir, buscamos realizar el mismo procedimiento que en el tema de productos unitarios asociativos, donde los productos en $C_e(G)'$ quedaban totalmente determinados si conocíamos $[\, ,\,]$ para los elementos de la base de Poincaré-Birkhoff-Witt.

Si $T := T_eQ$ y $T^n := T(T(\cdots(TT))$ es el subespacio generado por los productos $c_1(c_2(\cdots(c_{n-1}c_n))$ con $c_1, ..., c_n \in T$ entonces

$$[L_a, L_b](T^n) \subseteq T^n$$

es decir, que al aplicar $[L_a, L_b]$ no se aumenta el grado n del producto, ya que

$$[L_a, L_b](c_1(c_2(\cdots(c_{n-1}c_n))) = \sum_{i=1}^{n} c_1(c_2(\cdots[L_a, L_b](c_i)\cdots(c_{n-1}c_n))$$

y $[L_a, L_b](c_i) = [a, b, c_i] \in T$.

Observaremos ahora que un monomio de la forma $b_1(b_2(\cdots(b_{n-1}b_n))$ puede ser reordenado de la siguiente forma

$$\begin{aligned} b_1(b_2(\cdots(b_i(b_{i+1}\cdots(b_{n-1}b_n))) &= b_1(b_2(\cdots(b_{i+1}(b_i\cdots(b_{n-1}b_n))) \\ &\quad + b_1(b_2(\cdots(b_{i-1}[L_{b_i}, L_{b_{i+1}}](b_{i+2}\cdots(b_{n-1}b_n))) \end{aligned}$$

donde la "penalización" que se le añade al permutar b_i y b_{i+1} está en T^{n-2} por lo que hemos visto anteriormente.

Ejemplo Vamos a ordenar correctamente $a_2(a_3(a_4a_1))$:

$$\begin{aligned} a_2(a_3(a_4a_1)) = a_2(a_3(a_1a_4)) &= a_2(a_1(a_3a_4)) + a_2[a_3, a_1, a_4] \\ &= a_1(a_2(a_3a_4)) + [L_{a_2}, L_{a_1}](a_3a_4) + a_2[a_3, a_1, a_4] \\ &= a_1(a_2(a_3a_4)) + [a_2, a_1, a_3]a_4 + a_3[a_2, a_1, a_4] + a_2[a_3, a_1, a_4] \end{aligned}$$

Si conociéramos el valor de $[a_2, a_1, a_3]$, $[a_2, a_1, a_4]$ y $[a_3, a_1, a_4]$ en términos de la base $\{a_1, ..., a_n\}$ entonces lo escribiríamos y seguiríamos ordenando los sumandos nuevos que han aparecido. $\square$

Así sabemos que

el producto $a_i a_J$ *queda determinado por* $[\ ,\ ,\ ]$

y salvo una combinación lineal de términos de la base de Poincaré-Birkhoff-Witt de menor grado coincide con $a_J a_i$. Ahora veremos que también $a_I a_J$ queda determinado. Lo probaremos por inducción, suponemos que sabemos calcular $a_{I'} a_J$ si $|I'| < |I|$, es decir, $a_{I'}$ es de menor grado que a_I como una combinación lineal de la base de Poincaré-Birkhoff-Witt y que solo necesitamos para ello conocer el producto triple $[\ ,\ ,\ ]$. Escribiremos $a_I = a_i a_{I'}$. Sabemos que

$$a_{I'} a_i = a_i a_{I'} + r$$

con r una combinación lineal de elementos de menor grado de la base de Poincaré-Birkhoff-Witt. Así, usando el apartado 2 de la Proposición 46

$$\begin{aligned} a_I a_J = (a_i a_{I'}) a_J &= \frac{1}{2}(a_i a_{I'} + a_i a_{I'}) a_J \\ &= \frac{1}{2}(a_i a_{I'} + a_{I'} a_i - r) a_J \\ &= \frac{1}{2}(a_i a_{I'} + a_{I'} a_i) a_J - \frac{1}{2} r a_J \\ &= \frac{1}{2} a_i (a_{I'} a_J) + a_{I'}(a_i a_J) - \frac{1}{2} r a_J. \end{aligned}$$

Todos los términos de la última ecuación se desarrollarlos puesto que los factores de la izquierda en cada sumando son todos de grado menor que $|I|$, así pues, podría calcular cuanto sería el producto en término de la base. Por lo tanto,

el producto de $C_e(\mathrm{P})'$ *queda determinado por* $[\ ,\ ,\ ]$.

Esto demuestra el siguiente resultado.

Teorema 53. *Sean* P_1 *y* P_2 *dos lazos locales de Bruck. Se tiene que* $C_e(\mathrm{P}_1)'$ *es isomorfa a* $C_e(\mathrm{P}_2)'$ *como biálgebras si y solamente si* $(T_e\,\mathrm{P}_1, [\ ,\ ,\ ])$ *es isomorfa a* $(T_e\,\mathrm{P}_2, [\ ,\ ,\ ])$.

Si dispusiésemos de algún resultado que nos asegurase que el isomorfismo entre $C_e(\mathrm{P}_1)'$ y $C_e(\mathrm{P}_2)'$ proviene de una aplicación analítica entre P_1 y P_2 –sabemos que sí que proviene de una formal, pero no podemos asegurar la convergencia– entonces automáticamente tendríamos un análogo del Teorema 33 pero para lazos locales de Bruck. Tal resultado es cierto, pero cae ya fuera del alcance de este trabajo fin de grado.

Ejemplo. Vamos a calcular, a modo de ejemplo, el producto $(a_1a_3)(a_2a_4)$:

$$\begin{aligned}
(a_1a_3)(a_2a_4) &= \frac{1}{2}(a_1a_3 + a_3a_1)(a_2a_4) = \frac{1}{2}(a_1(a_3(a_2a_4)) + \frac{1}{2}a_3(a_1(a_2a_4)) \\
&= \frac{1}{2}(a_1(a_2(a_3a_4)) + \frac{1}{2}a_1[a_3, a_2, a_4] + \frac{1}{2}a_1(a_3(a_2a_4)) \\
&\quad + \frac{1}{2}[a_3, a_1, a_2]a_4 + \frac{1}{2}a_2[a_3, a_1, a_4] \\
&= (a_1(a_2(a_3a_4)) + a_1[a_3, a_2, a_4] + \frac{1}{2}[a_3, a_1, a_2]a_4 + \frac{1}{2}a_2[a_3, a_1, a_4].
\end{aligned}$$

□

Finalmente es interesante conocer qué propiedades tiene este producto $[\ ,\ ,\ ]$ que permite clasificar localmente los lazos de Bruck.

Proposición 54. *El producto triple* $[\ ,\ ,\ ]$ *cumple las siguientes relaciones:*

1. $[a, b, c] = -[b, a, c]$
2. $[a', b', [a, b, c]] = [[a', b', a], b, c] + [a, [a', b', b], c] + [a, b, [a', b', c]]$
3. $[a, b, c] + [b, c, a] + [c, a, b] = 0$

es decir, es un producto triple de Lie.

Demostración. Probemos cada una de las propiedades. Puesto que el conmutador en $\mathrm{End}(C_e(\mathrm{P})')$ define un álgebra de Lie:

1. $[a, b, c] = [[L_a, L_b], L_c](1) = -[[L_b, L_a], L_c](1) = -[b, a, c]$

2. $$\begin{aligned}
[a', b', [a, b, c]] &= [[L_{a'}, L_{b'}], L_{[a,b,c]}](1) = [[L_{a'}, L_{b'}], [[L_a, L_b], L_c]](1) \\
&= [[[[L_{a'}, L_{b'}], L_a], L_b], L_c](1) + [[L_a, [[L_{a'}, L_{b'}], L_b], L_c]](1) \\
&\quad + [[L_a, L_b], [[L_{a'}, L_{b'}], L_c]](1) \\
&= [[L_{[a',b',a]}, L_b], L_c](1) + [L_a, [L_{[a',b',b]}, L_c]](1) \\
&\quad + [[L_a, L_b], L_{[a',b',c]}](1) \\
&= [[a', b', a], b, c] + [a, [a', b', b], c] + [a, b, [a', b', c]]
\end{aligned}$$

3. Por último

$$\begin{aligned}
[a, b, c] + [b, c, a] + [c, a, b] &= [[L_a, L_b], L_b](1) + [[L_b, L_c], L_a](1) \\
&\quad + [[L_c, L_a], L_b](1) = 0
\end{aligned}$$

□

Se puede demostrar que cualquier producto triple de Lie proviene de un lazo local de Bruck en los términos que hemos expuesto, pero nuevamente esto cae fuera del alcance de este trabajo.

Ejemplo. Volvemos al conjunto P_n con el que hemos iniciado este capítulo. Consideraremos que $\exp(X)$ tiene coordenadas X. Fijemos una base $\{X_i\}_i$ del espacio vectorial de matrices simétricas $n \times n$. En lugar de escribir $\partial_i|_e$ para la i-ésima derivada parcial –aquí $e = \mathrm{Id}$– podemos escribir $\partial_{X_i}|_e$, es decir usando la notación propia de derivadas direccionales. Así, si $Z = \sum_i \alpha_i X_i$, también podemos considerar la derivada direccional en la dirección Z que viene dada por $\partial_Z|_e = \sum_i \alpha_i \partial_{X_i}|_e$ o a través de la fórmula natural

$$\partial_Z|_e f := \partial_Z|_e (f(\exp(Z)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\exp(0 + tZ))$$

Dadas tres matrices simétricas Y_1, Y_2, Y_3, vamos a calcular $[\partial_{Y_1}|_e, \partial_{Y_2}|_e, \partial_{Y_3}|_e]$.

Sabemos que $[\partial_{Y_1}|_e, \partial_{Y_2}|_e, \partial_{Y_3}|_e]$ una combinación lineal de elementos de la base de $T_e P_n$, es decir, un $\partial_Z|_e$ para alguna matriz simétrica $Z = \sum_i \alpha_i X_i$. Si $x_j \colon P_n \longrightarrow \mathbb{R}$ es la j-ésima función coordenada entonces $\partial_Z|_e(x_j) = \sum_i \alpha_i \partial_I|_e(x_j) = \alpha_j$. Por tanto para encontrar Z basta aplicar la distribución $[\partial_{Y_1}|_e, \partial_{Y_2}|_e, \partial_{Y_3}|_e]$ a cada una de las funciones coordenadas. Tenemos

$$\begin{aligned}
x_j(Z) &= [\partial_{Y_1}|_e, \partial_{Y_2}|_e, \partial_{Y_3}|_e](x_j) \\
&= \partial_{Y_1}|_e * (\partial_{Y_2}|_e * \partial_{Y_3}|_e)((x_j) - \partial_{Y_2}|_e * (\partial_{Y_1}|_e * \partial_{Y_3}|_e))(x_j) \\
&= \partial_{Y_1}|_{A=e} \otimes \partial_{Y_2}|_{B=e} \otimes \partial_{Y_3}|_{C=e}(x_j(A * (B * C))) \\
&\quad - \partial_{Y_2}|_{A=e} \otimes \partial_{Y_1}|_{B=e} \otimes \partial_{Y_3}|_{C=e}(x_j(A * (B * C))) \\
&= \left.\frac{d}{dt_1}\right|_0 \left.\frac{d}{dt_2}\right|_0 \left.\frac{d}{dt_3}\right|_0 x_j(\exp(\frac{1}{2}t_1 Y_1)\exp(\frac{1}{2}t_2 Y_2)\exp(t_3 Y_3) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \exp(\frac{1}{2}t_2 Y_2)\exp(\frac{1}{2}t_1 Y_1)) \\
&\quad - \left.\frac{d}{dt_1}\right|_0 \left.\frac{d}{dt_2}\right|_0 \left.\frac{d}{dt_3}\right|_0 x_j(\exp(\frac{1}{2}t_1 Y_2)\exp(\frac{1}{2}t_2 Y_1) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \exp(t_3 Y_3)\exp(\frac{1}{2}t_2 Y_1)\exp(\frac{1}{2}t_1 Y_2)) \\
&= x_j\left(\frac{1}{2}Y_1\frac{1}{2}Y_2Y_3 + \frac{1}{2}Y_1Y_3\frac{1}{2}Y_2 + \frac{1}{2}Y_2Y_3\frac{1}{2}Y_1 + Y_3\frac{1}{2}Y_2\frac{1}{2}Y_1\right) \\
&\quad - x_j\left(\frac{1}{2}Y_2\frac{1}{2}Y_1Y_3 + \frac{1}{2}Y_2Y_3\frac{1}{2}Y_1 + \frac{1}{2}Y_1Y_3\frac{1}{2}Y_2 + Y_3\frac{1}{2}Y_1\frac{1}{2}Y_2\right) \\
&= x_j\left(\frac{1}{4}[Y_1, Y_2]Y_3 + \frac{1}{4}Y_3[Y_2, Y_1]\right) = x_j\left(\frac{1}{4}[[Y_1, Y_2], Y_3]\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$[\partial_{Y_1}|_e, \partial_{Y_2}|_e, \partial_{Y_3}|_e] = \frac{1}{4}\partial_{[[Y_1,Y_2],Y_3]}$$

Así pues, el sistema triple de Lie correspondiente a P_n es salvo isomorfismo el conjunto de matrices simétricas $n \times n$ con producto triple $\frac{1}{4}[[Y_1, Y_2], Y_3]$.

$\square$

Conclusiones

En esta memoria, pese a sus limitaciones de extensión, hemos hecho un resumen bastante completo respecto al tema de álgebras de Hopf. Los conceptos básicos sobre álgebras, coálgebras, etc han quedado perfectamente tratados al igual que lo relativo al proceso de linealización, y todas sus características. Gran parte del peso teórica del trabajo, como hemos podido comprobar, ha recaído en las álgebras de Hopf asociativas y las álgebras de Lie que obteníamos de ellas. Si bien es cierto eso, también las no asociativas han sido explicadas correctamente. A pesar de todo esto, esto solo podría considerarse una introducción a este tema puesto que teóricamente y en sus aplicaciones, no hemos ni alcanzado el inicio de él. Aún así, el objetivo del mismo se ha obtenido puesto que era obtener un trabajo donde la base de todos estos conceptos estuvieran, sin olvidar, los múltiples ejemplos al respecto. Concluyendo así que este trabajo me ha permitido obtener una base muy amplia respecto a este tema, pero en el cual aún, si tuviéramos más tiempo, se puede llegar a profundizar mucho.

Bibliografía

[1] P.O. Mikheev y L.V. Sabinin: *Infinitesimal theory of local analytic loops*, Soviet Math. Dokl. 36 (1988), no. 3, 545-548. Traducción de la versión original rusa de 1987.

[2] J.M. Pérez-Izquierdo: *An envelope for Boal algebras*. J. Algebra 284,(2005), no. 2, 480–493.

[3] J.M. Pérez-Izquierdo: *Algebras, hyperalgebras, nonassociative bialgebras and loops*. Adv. Math. 208 (2007), no. 2, 834–876.

[4] J.M. Pérez-Izquierdo. Apuntes de clase.

[5] J.P. Serre: *Lie algebras and Lie groups*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Quinta edición del original de 1965.

[6] M.E. Sweedler: *Hopf algebras*. Mathematical Lecture Note Series W.A. Benjamin Inc., New York 1969.

[7] F.W. Warner: *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.